

Теорема о вписанном угле: связь углов и дуг окружности

Угол и дуга окружности связаны простой и полезной формулой.

Окружность и вписанный угол в геометрии 8 класса

Окружность помогает находить углы без измерений:
достаточно знать дугу, хорду или центральный угол.
Теорема о вписанном угле делает такие задачи
понятными и быстрыми для решения.



Что называют вписанным углом

1.

Вершина на окружности

Вписанный угол имеет вершину прямо на окружности, а его стороны пересекают окружность в двух точках. Именно это отличает его от обычного угла на плоскости.

2.

Дуга под углом

Между сторонами угла выделяется дуга окружности, на которую он опирается. Эта дуга становится главной частью задачи: по ней находят величину угла или проверяют ответ.

3.

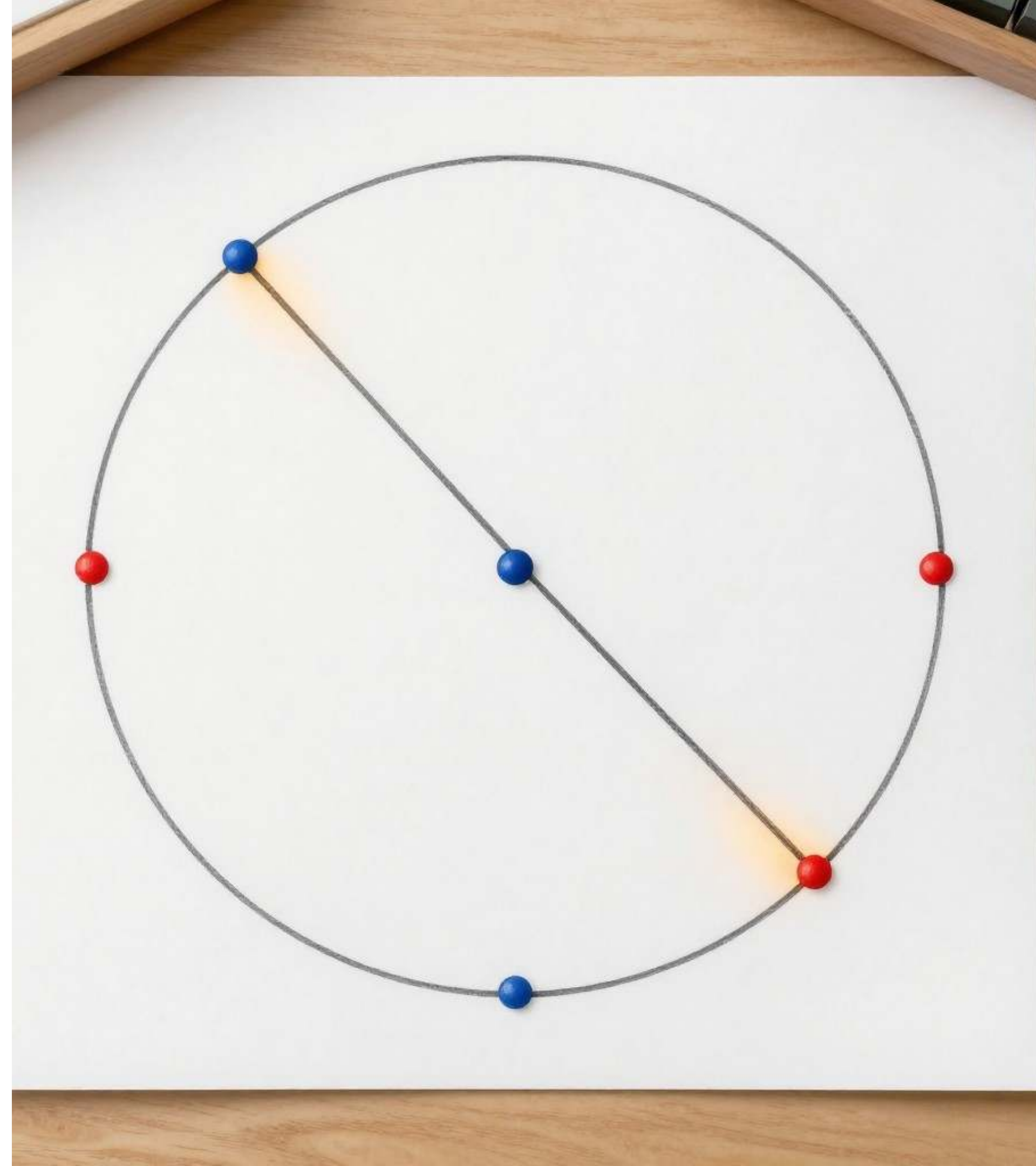
Обозначения точками

На чертежах часто используют точки А, В и С. Например, угол АСВ будет вписанным, если точки А, С и В лежат на окружности.

4.

Не путать с хордой

Хорда соединяет две точки окружности отрезком, а дуга — это часть окружности между этими точками. Путаница между ними часто приводит к ошибкам в решении.



Обозначения на чертеже окружности

Центр окружности

Точку O отмечают как центр окружности: от неё удобно проводить радиусы к нужным точкам. Это помогает увидеть, какой центральный угол связан с выбранной дугой.

Хорда и дуга

Хорда AB соединяет две точки окружности, а дуга AB — это часть самой окружности между ними. На чертеже эти элементы выглядят похоже, но означают разные вещи.

Вписанный угол

Угол ACB называют вписанным, если его вершина лежит на окружности, а стороны проходят через точки A и B . Он опирается именно на дугу AB .

Связанный центральный угол

Угол AOB — центральный, потому что его вершина находится в центре. Он опирается на ту же дугу, что и вписанный угол ACB .



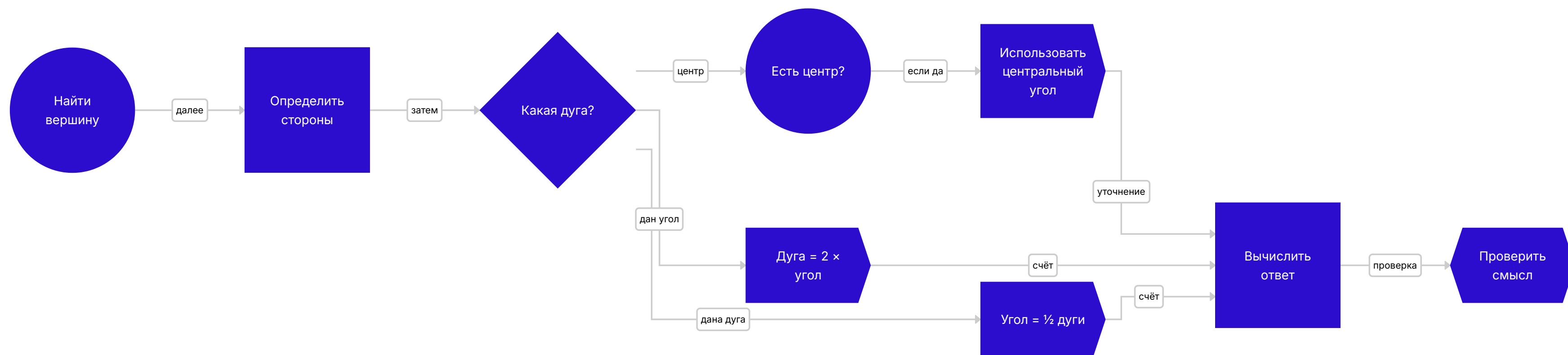
Это главное правило темы: зная дугу, можно сразу найти угол, а зная угол — восстановить дугу.

2

раза меньше мера
вписанного угла
по сравнению с дугой,
на которую он опирается

Как решается задача на вписанный угол

Последовательность действий при работе с чертежом окружности

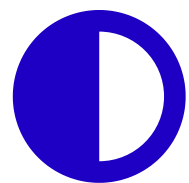


Связь меры дуги и вписанного угла

График помогает увидеть, как меняется ответ при увеличении дуги. Это удобно для быстрой проверки вычислений в задачах на окружность.

Точки лежат на прямой зависимости 1:2: вписанный угол всегда составляет половину дуги.

Частные случаи теоремы



Полукружность

Если вписанный угол опирается на полукружность, он всегда равен 90° .
Такой случай часто помогает сразу заметить прямой угол в чертеже без дополнительных вычислений.



Одна дуга — равные углы

Два вписанных угла, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны между собой. Это свойство удобно использовать, когда на рисунке несколько точек лежат на одной окружности.



Диаметр как подсказка

Если сторона угла проходит через концы диаметра, то дуга равна полукружности. Значит, угол прямой, и это помогает быстро решать задачи на распознавание.

Три типичных примера вычислений

Дуга	Угол
80°	40°
140°	70°
180°	90°

Примеры показывают, как работает правило половины в разных ситуациях.

Во всех примерах вписанный угол вдвое меньше дуги, поэтому ответ находится делением на 2.

Доказательство через центральный угол

Соединяем с центром

Проведём радиусы к концам дуги. Получатся два равных отрезка, потому что все радиусы одной окружности одинаковы.

Получаем равнобедренный треугольник

Из равных радиусов возникает равнобедренный треугольник. В нём углы при основании равны, а значит, их удобно связать с искомым вписанным углом.

Связываем с центральным углом

Центральный угол вместе с двумя равными углами треугольника образует полную сумму углов. Отсюда следует нужное соотношение между центральным и вписанным углами.

Итог доказательства

Вписанный угол оказывается в два раза меньше центрального угла, опирающегося на ту же дугу. Значит, он равен половине дуги.



Случай диаметра и прямого угла

1. Полуокружность

Если вершина вписанного угла лежит на окружности, а его стороны проходят через концы диаметра, то угол опирается на полуокружность. Такая дуга всегда равна 180° .

2. Прямой угол

По теореме о вписанном угле половина от 180° даёт 90° . Значит, любой вписанный угол, опирающийся на диаметр, обязательно является прямым.

3. Применение в задачах

Это свойство удобно использовать, когда нужно быстро распознать прямой угол на чертеже. Оно особенно часто встречается в задачах о прямоугольных треугольниках, вписанных в окружность.



Сравнение углов, опирающихся на одну дугу

На одном чертеже разные вписанные углы могут опираться на одну и ту же дугу и иметь одинаковую величину.

Все вписанные углы, опирающиеся на дугу 120° , равны 60° , а центральный угол сохраняет исходную меру дуги.

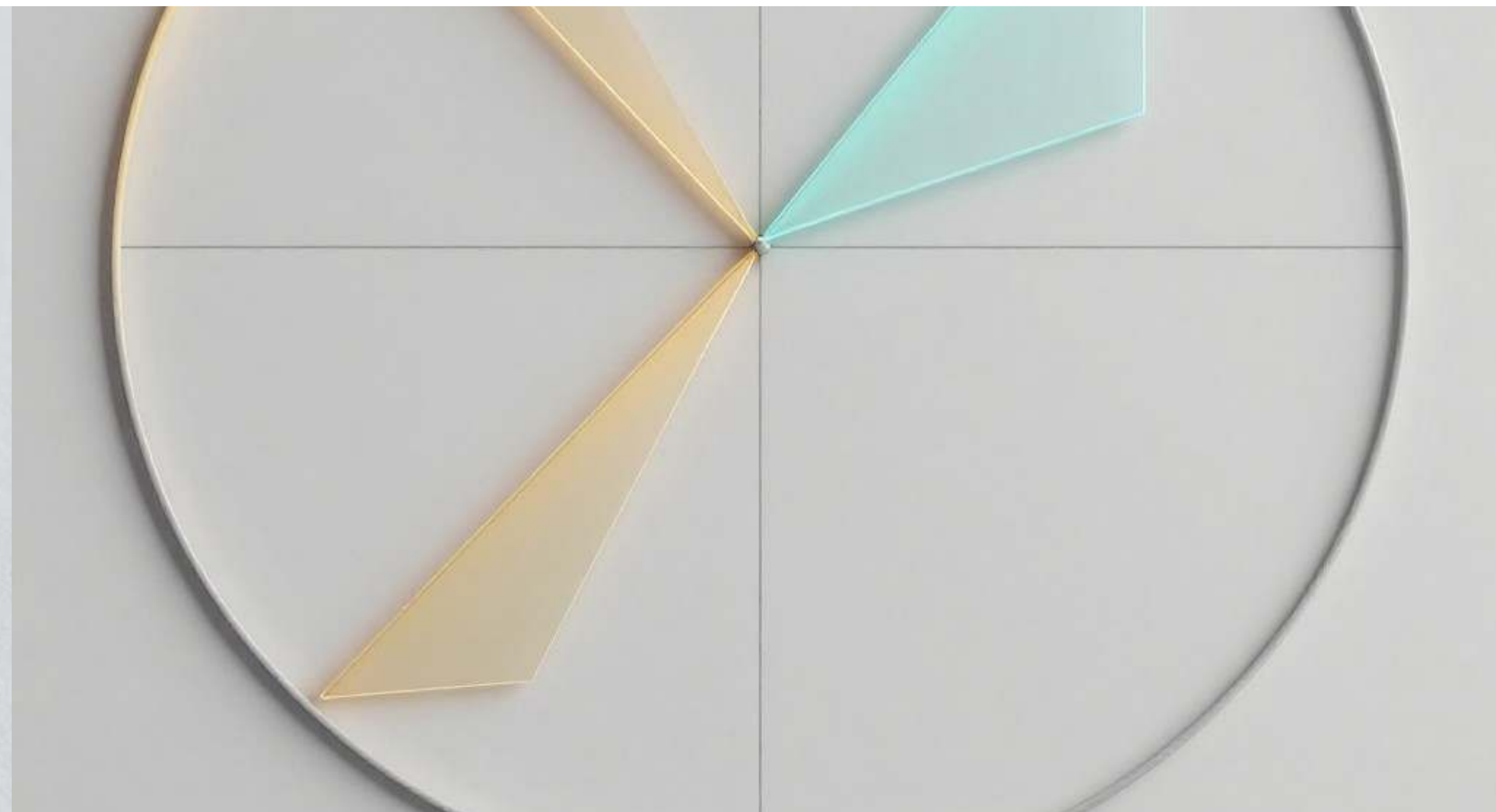
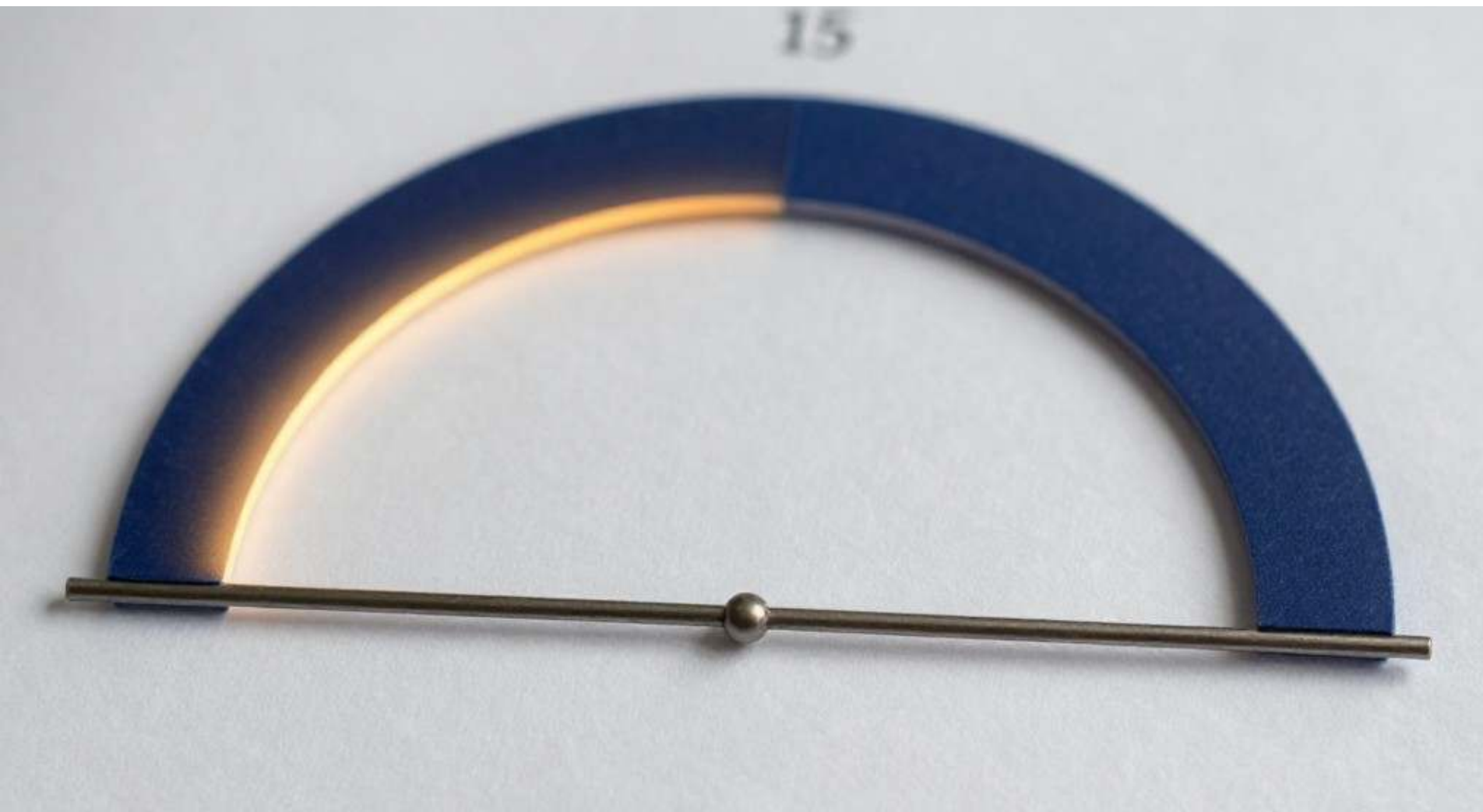
Пример решения задачи по чертежу

Дуга АВ уже известна

На рисунке выделена дуга АВ величиной 150° . Это сразу задаёт ориентир: любой вписанный угол, который опирается на эту дугу, можно найти делением на 2. Так чертёж помогает обойтись без измерений и догадок.

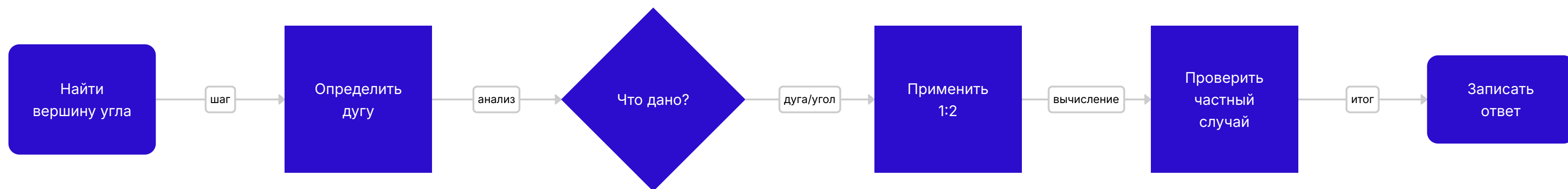
Два угла — один ответ

Угол АСВ опирается на дугу АВ, поэтому его мера равна 75° . Если второй угол АDB опирается на ту же дугу, он тоже равен 75° . Рисунок показывает, что одинаковая дуга даёт одинаковые вписанные углы.



Алгоритм решения задач на окружность

Последовательность действий помогает не пропустить дугу, диаметр и частные случаи теоремы.



Типичные ошибки в задачах на вписанный угол

1.

Путают хорду и дугу

Хорда — это отрезок, а дуга измеряется в градусах. Если перепутать эти элементы, невозможно правильно выбрать формулу и определить, что именно дано в задаче.

2.

Берут не ту меру

Иногда вписанный угол принимают за всю дугу, хотя он всегда равен только её половине. Из-за такой ошибки ответ становится в два раза больше нужного.

3.

Выбирают неверную дугу

Между одними и теми же точками могут быть малая и большая дуги. Нужно внимательно смотреть на рисунок, иначе можно подставить неправильное значение и потерять смысл решения.

4.

Пропускают частный случай

Если на чертеже есть диаметр или полуокружность, решение часто упрощается. Когда этот признак не замечают, задача решается дольше и с лишними вычислениями.



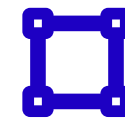
Проверка вычислений на коротких примерах

Во всех строках видно одно и то же правило: дуга и вписанный угол отличаются в два раза.

Если результат не вдвое меньше дуги или не вдвое больше угла, значит, в вычислениях допущена ошибка.

Величина	Значение 1	Значение 2
Угол	35°	70° дуга
Угол	50°	100° дуга
Дуга	200°	100° угол

Где применяется теорема о вписанном угле



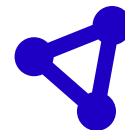
Треугольники

Теорема помогает находить углы в треугольниках, если их вершины лежат на окружности. Особенно удобно определять прямой угол и проверять, является ли треугольник вписанным.



Четырёхугольники

В задачах на вписанные четырёхугольники теорема позволяет сравнивать противоположные углы и доказывать их связь. Это делает чертёж понятнее и сокращает количество вычислений.



Хорды и диаметры

Если на рисунке есть хорды и диаметр, теорема помогает связать их с дугами и быстро установить нужные углы. Так находят неизвестные элементы без измерения линейкой.



Построения и доказательства

В более сложных заданиях теорема служит опорой для доказательств и построений. Она помогает переходить от рисунка к строгому рассуждению и проверять правильность ответа.

Связь трёх величин: дуга, центральный и вписанный угол

Один и тот же участок окружности может задавать три связанные величины, которые удобно сравнивать на одном рисунке.

Центральный угол повторяет меру дуги, а вписанный всегда составляет её половину, поэтому ошибки в выборе типа угла легко заметить.

Главные свойства темы для запоминания

Половина дуги

Мера вписанного угла всегда равна половине дуги, на которую он опирается. Это основное правило, с которого нужно начинать решение любой задачи по теме.

Одна дуга — равные углы

Если несколько вписанных углов опираются на одну и ту же дугу, то они равны между собой. Это позволяет сравнивать углы даже без дополнительных вычислений.

Диаметр даёт прямой угол

Угол, опирающийся на диаметр, всегда прямой, потому что полуокружность составляет 180° . Этот факт часто помогает быстро узнавать прямой угол на чертеже.

Теорема, которая делает окружность понятной

Теорема о вписанном угле связывает дуги и углы простым правилом и помогает уверенно решать задачи на окружность. Она полезна и для вычислений, и для доказательств, и для распознавания прямых углов.