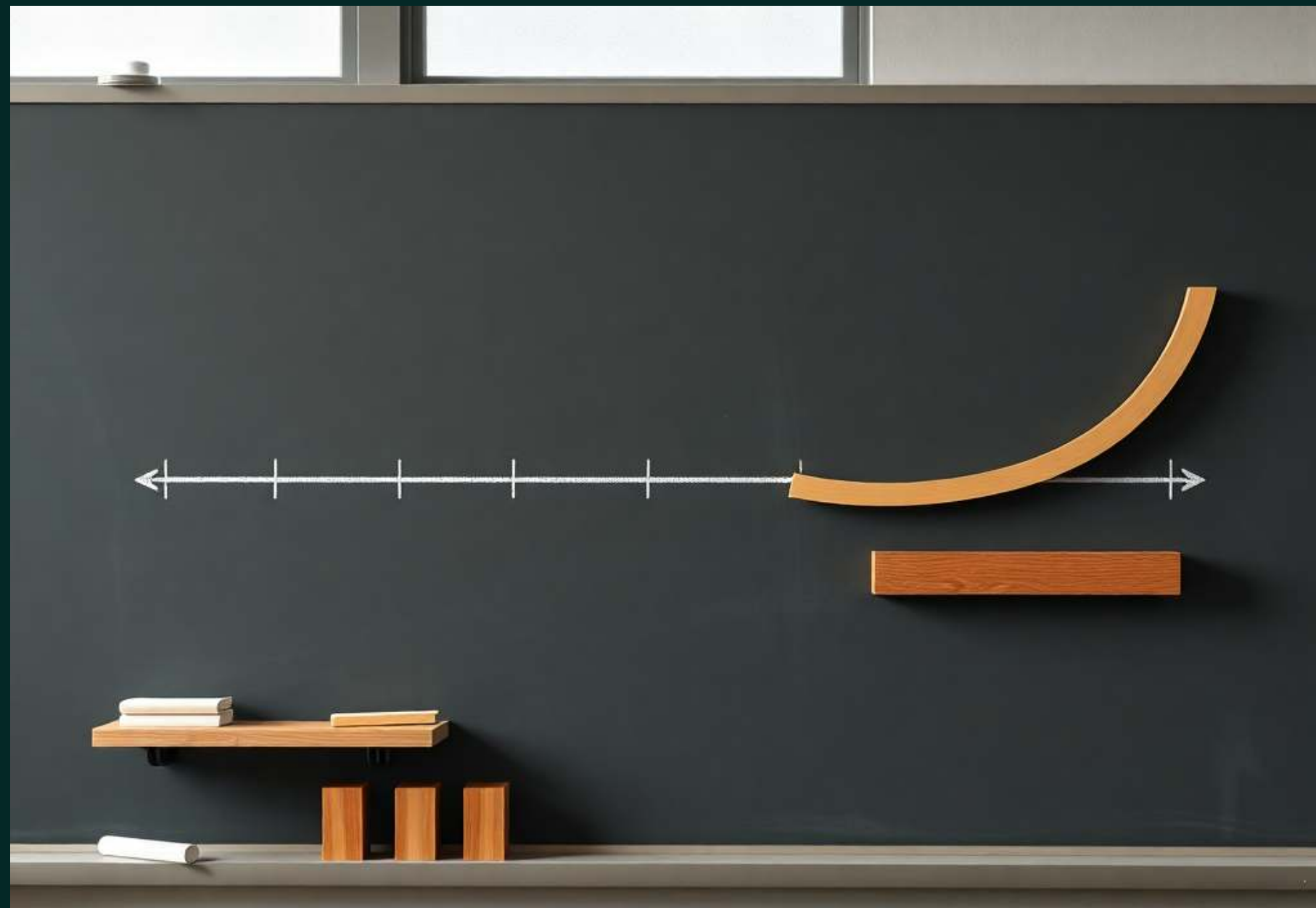


# Неравенства высших степеней: методы решения



Как находить знаки многочлена на числовой прямой?

# Где встречаются неравенства высших степеней

Эта тема продолжает работу с квадратными неравенствами и учит решать задачи с многочленами третьей, четвёртой и более высокой степени. Она нужна в упражнениях, при разложении на множители и в подготовке к ОГЭ.



# Основные формы неравенств с многочленами



## Строгие неравенства

Записи вида  $P(x) > 0$  и  $P(x) < 0$  требуют найти промежутки, где выражение строго положительно или отрицательно. Точки, в которых  $P(x) = 0$ , в ответ не включаются.

## Нестрогие неравенства

В неравенствах  $P(x) \geq 0$  и  $P(x) \leq 0$  корни многочлена могут входить в решение. Это важно учитывать при записи ответа на числовой прямой.

## Что означает $P(x)$

Буква  $P(x)$  обозначает многочлен. Например, это может быть  $x^3 - 4x$  или произведение нескольких скобок, которое удобно исследовать по знакам.

## Зачем нужен знак

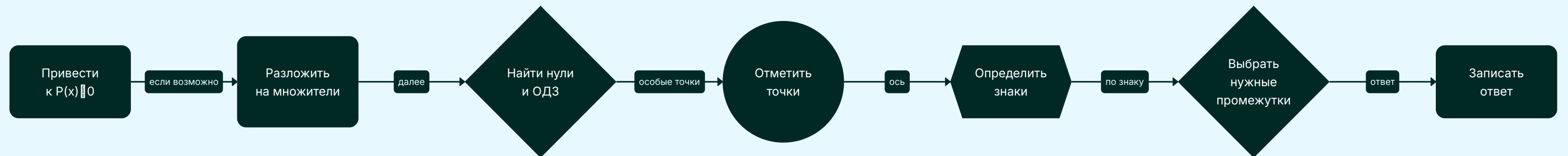
Главная задача — определить, где выражение положительно, а где отрицательно. Именно поэтому решение почти всегда связано с промежутками на оси.

## Почему важны корни

Корни многочлена — это точки, в которых значение равно нулю. Они делят числовую прямую на части и помогают понять, где меняется знак.

# Общий алгоритм решения неравенства

Последовательность действий при работе с многочленами и дробями



# Разложение на множители как первый шаг

## Зачем раскладывать

Разложение на множители помогает увидеть нули выражения сразу. Если произведение равно нулю, то хотя бы один множитель равен нулю, и это упрощает поиск корней.

## Как получают скобки

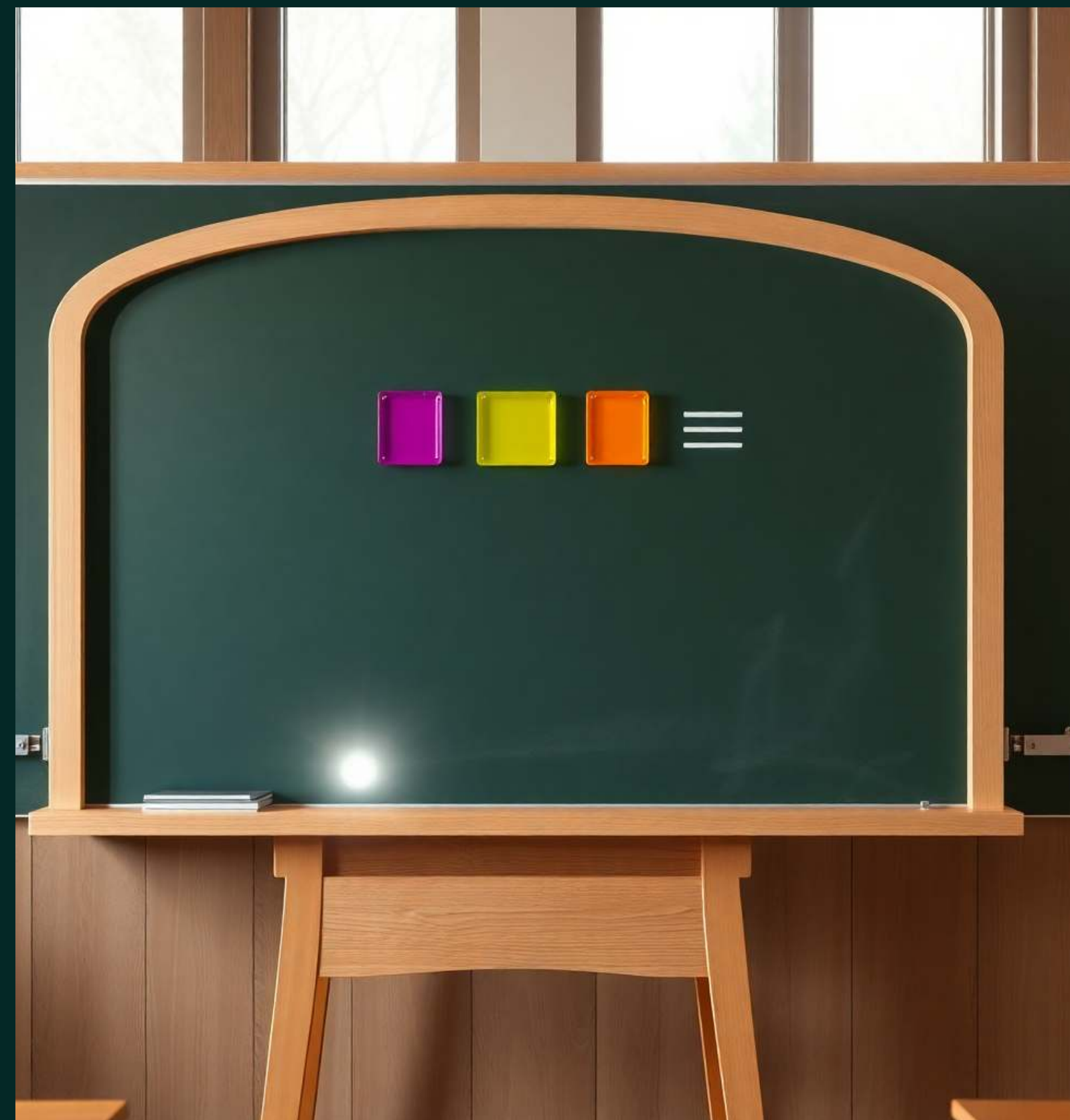
Чаще всего используют вынесение общего множителя, формулы сокращённого умножения и группировку. Эти приёмы позволяют превратить большой многочлен в удобное произведение.

## Примеры из школьных задач

Выражение  $x^3 - x$  удобно записать как  $x(x-1)(x+1)$ , а  $x^4 - 16$  — как  $(x^2 - 4)(x^2 + 4)$ . После этого решение становится намного короче.

## Что значит кратность

Если множитель повторяется, корень имеет кратность. Например, запись  $(x-2)^2$  показывает двойной корень  $x=2$ , и это влияет на поведение знака.



# Почему метод интервалов работает



Школьный курс алгебры 9 класса; схематический пример с корнями  $-2$ ,  $1$  и  $4$

- Корни делят числовую ось на части, а внутри каждой части знак не меняется. Это позволяет проверить лишь один тестовый пункт на каждом промежутке.
- Для выражения с корнями  $-2$ ,  $1$  и  $4$  знак постоянен на каждом участке, поэтому решение сводится к выбору нужных промежутков.

# 2

повторяющийся корень обычно не меняет знак при переходе через точку.

Кратность помогает заранее понять, где знак меняется, а где остаётся тем же. Это экономит время и делает решение по числовой оси нагляднее.

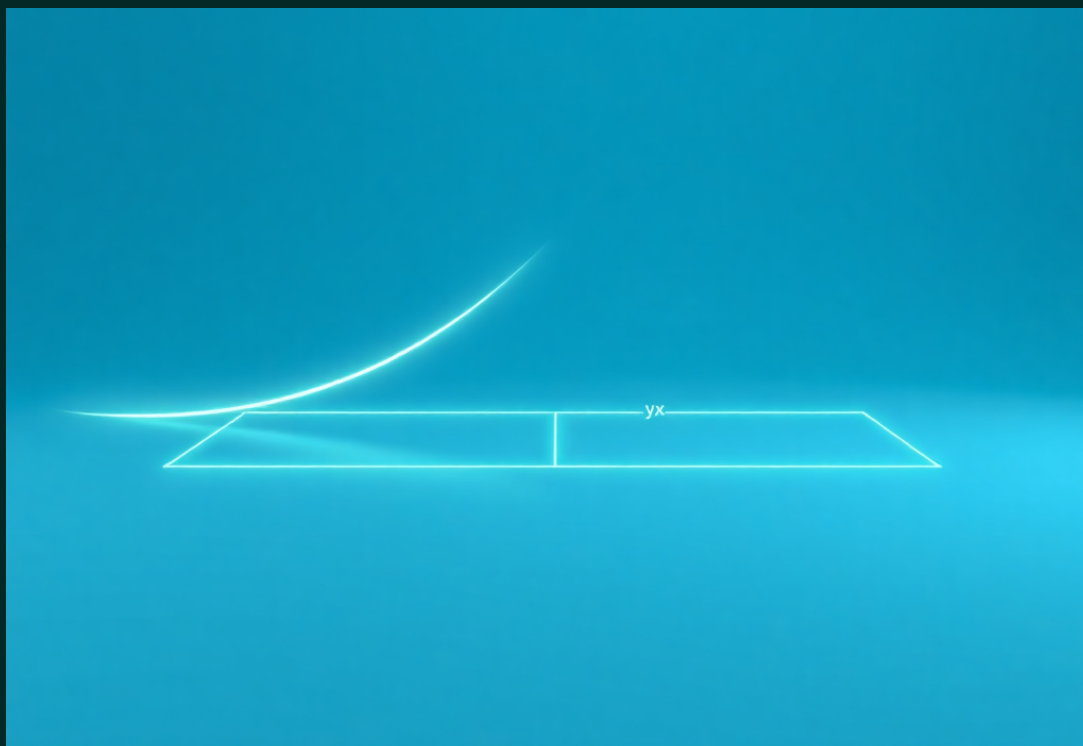
# Основные методы решения и их назначение

Сравнение способов показывает, когда каждый из них особенно полезен.

Метод интервалов подходит почти всегда, а остальные способы помогают упростить запись, проверить ответ или свести задачу к более простой форме.

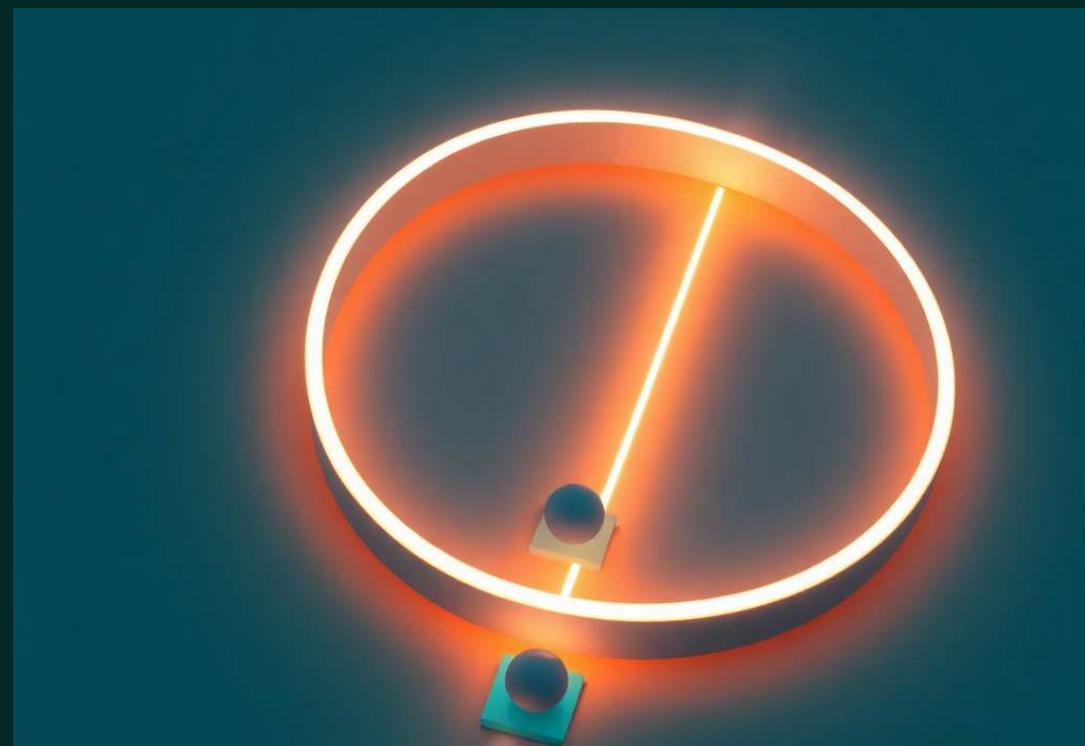
| Метод                   | Когда применяется        | Что находится         | Особенность               |
|-------------------------|--------------------------|-----------------------|---------------------------|
| Разложение на множители | многочлен раскладывается | нули выражения        | упрощает решение          |
| Метод интервалов        | многочлены и дроби       | знаки на промежутках  | самый универсальный       |
| Графический способ      | есть график функции      | где $y > 0$ и $y < 0$ | удобен для проверки       |
| Замена переменной       | симметричные выражения   | более простая задача  | полезна в сложных случаях |

# Как график помогает решить неравенство



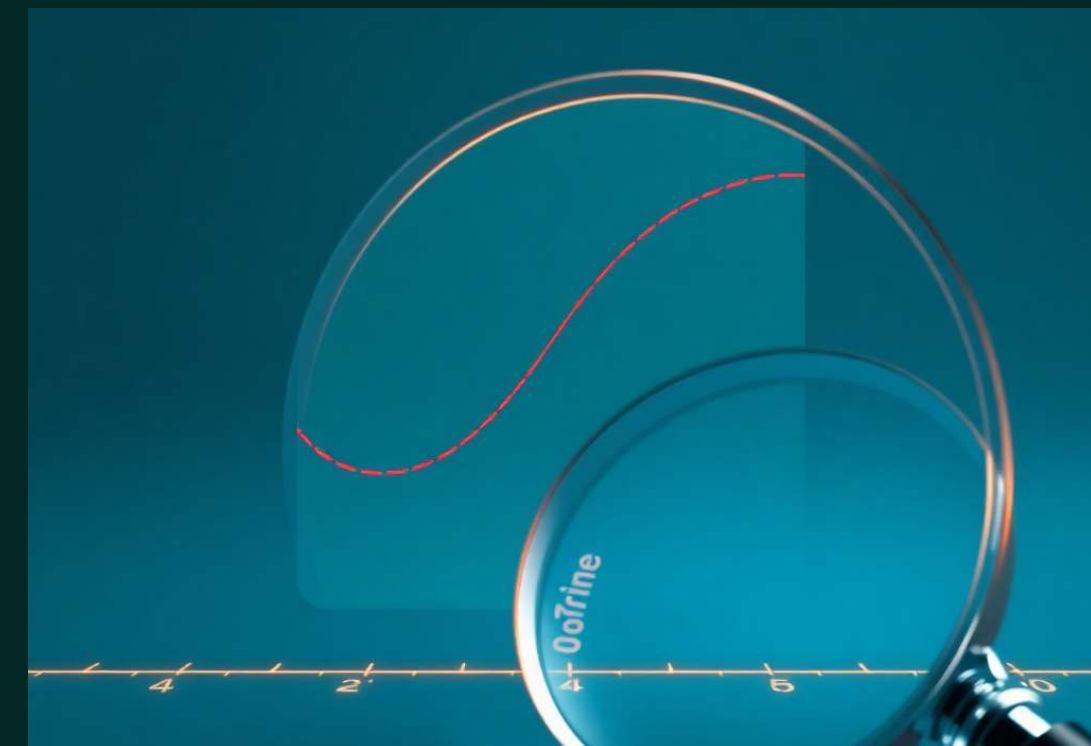
## График выше оси

Когда линия функции  $y=P(x)$  находится выше оси  $Ox$ , значения функции положительны. Это сразу показывает, где выполняется неравенство  $P(x)>0$ . Такой взгляд делает ответ более наглядным и помогает связать алгебру с рисунком.



## Точки пересечения

Места, где график пересекает ось  $Ox$ , — это корни уравнения  $P(x)=0$ . Именно они становятся границами промежутков решения. Если точка лежит на оси, нужно внимательно проверить, входит ли она в ответ.



## Проверка результата

График особенно полезен после алгебраического решения. Он помогает заметить ошибку в знаках, пропущенный корень или лишнюю точку. Поэтому способ удобно использовать как самопроверку.

# Пример кубического неравенства

01

## 1. Находим корни

Для неравенства  $(x-1)(x+2)(x-4) > 0$  корнями являются  $x = -2$ ,  $x = 1$  и  $x = 4$ . Эти точки нужно сразу отметить на числовой прямой, потому что они делят её на промежутки.

02

## 2. Делим ось

После отметки корней ось распадается на четыре части:  $(-\infty; -2)$ ,  $(-2; 1)$ ,  $(1; 4)$ ,  $(4; +\infty)$ . На каждом промежутке знак произведения остаётся постоянным.

03

## 3. Определяем знаки

Можно взять тестовое число в каждом промежутке или использовать правило смены знака через нечётные корни. Для этого примера знаки чередуются от одного участка к другому.

04

## 4. Выбираем нужные промежутки

Так как требуется условие  $> 0$ , подходят только те промежутки, где произведение положительно. Точки  $-2$ ,  $1$  и  $4$  не включаются, потому что неравенство строгое.

05

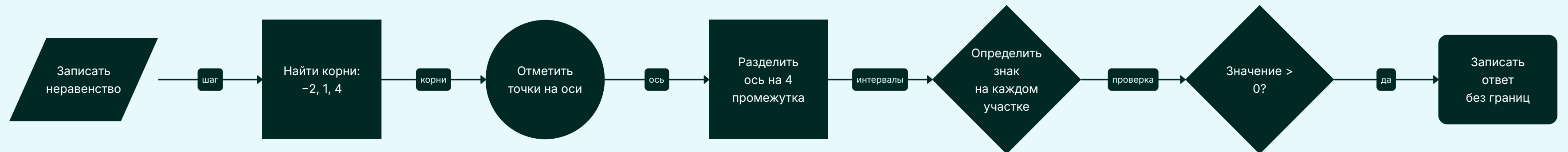
## 5. Записываем ответ

Итог удобно оформить как объединение подходящих промежутков на числовой прямой. Важно не забыть скобки и исключить граничные точки, где выражение равно нулю.

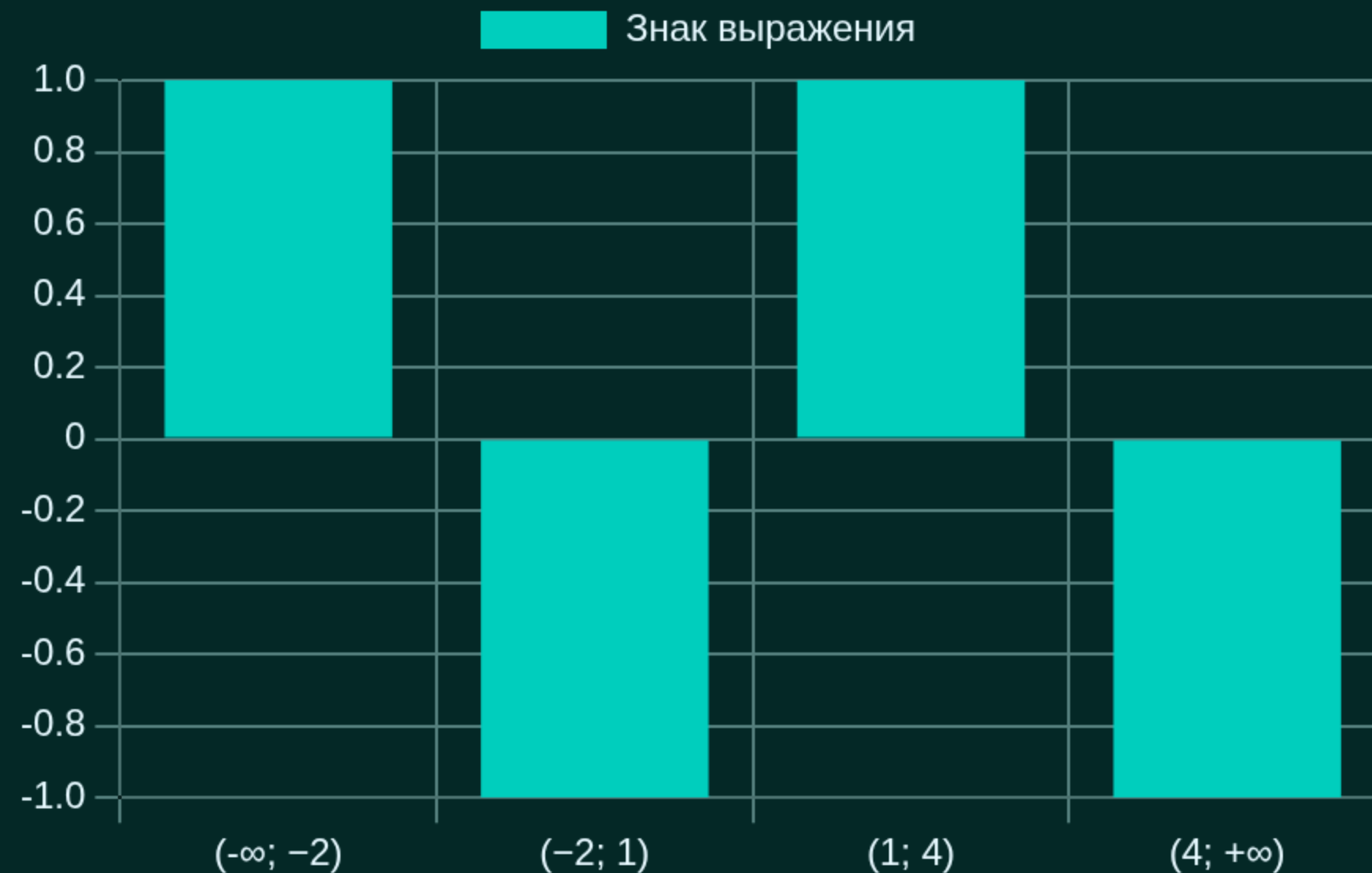


# Решение неравенства по шагам

Пример:  $(x-1)(x+2)(x-4) > 0$  — от разложения до ответа на числовой прямой



# Знаки на промежутках в примере



- Нули  $-2$ ,  $1$  и  $4$  делят ось на четыре части. Знак на соседних промежутках меняется, потому что все корни простые.
- Положительными получаются только два промежутка:  $(-\infty; -2)$  и  $(1; 4)$ . Именно они входят в ответ строгого неравенства.

Учебный пример по алгебре 9 класса

# Неравенства с повторяющимися корнями

## Чётная кратность

Если корень входит в выражение в чётной степени, например  $(x-2)^2$ , знак при переходе через него не меняется. Такой корень не создаёт «переворот» на числовой прямой.

## Почему это важно

Без учёта кратности легко перепутать плюсы и минусы на промежутках. Тогда в ответ попадут лишние интервалы или будут пропущены нужные части решения.

## Нечётная кратность

Корень кратности 1, 3, 5 и так далее обычно меняет знак выражения. Поэтому точки вида  $x=-3$  или  $x=1$  сразу делят ось на участки с разными знаками.

## Что записывать в ответе

При неравенстве  $<0$  или  $>0$  подходят только те промежутки, где произведение имеет нужный знак. Сами корни включаются лишь в нестрогих неравенствах, если это разрешено условием.

# Типичные ошибки при решении неравенств

| Ошибка             | Причина                  | Последствие           | Пример    |
|--------------------|--------------------------|-----------------------|-----------|
| Не исключают корни | Забывают про $>$ и $<$   | Лишние точки в ответе | $x=2$     |
| Путают кратность   | Не смотрят на степень    | Неверный знак         | $(x-1)^2$ |
| Не отмечают разрыв | Не проверяют знаменатель | Запрещённые значения  | $x+4=0$   |

Таблица помогает быстро увидеть, где чаще всего теряются баллы при решении неравенств высших степеней.

Главные потери связаны не с вычислениями, а с невнимательностью: нужно проверять границы, кратность корней и точки разрыва.

# Как решать дробные неравенства

## 01 Сначала ОДЗ

Определи область допустимых значений: знаменатель не должен обращаться в ноль. Это сразу убирает запрещённые точки и помогает не включить их в ответ по ошибке.

## 02 Разложи на множители

По возможности представь числитель и знаменатель в виде произведений. Тогда нули числителя и знаменателя легко найти и нанести на числовую прямую.

## 03 Рассмотрите все точки

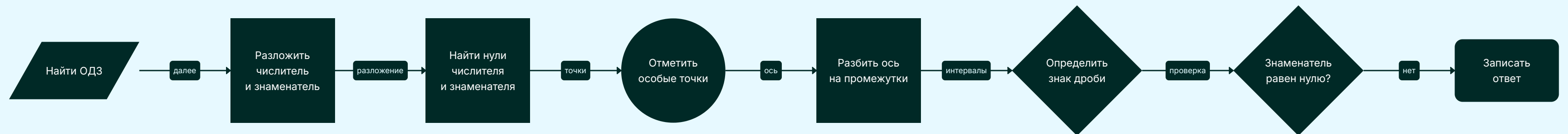
Особые точки — это корни числителя и точки, где знаменатель равен нулю. Именно они делят ось на промежутки, где знак дроби не меняется.

## 04 Проверь знак и ответ

На каждом промежутке определи знак дроби и выбери только те части оси, которые подходят условию. Затем обязательно исключи точки, где знаменатель равен нулю.

# Алгоритм решения дробного неравенства

Общий порядок действий для дробно-рациональных выражений в школьных задачах



# Где метод интервалов используется чаще всего



Обобщение школьного курса алгебры 9 класса

- В задачах со скобками и дробями метод интервалов даёт самый наглядный результат: все важные точки видно сразу на одной оси.
- Самыми удобными для метода интервалов остаются дроби и произведения: они чаще встречаются и быстрее приводят к ответу.

# Как связать ответ с графиком



Выше оси  $Ox$

Если график функции  $y=P(x)$  расположен выше оси  $Ox$ , то значение выражения положительно. Это соответствует решению неравенства  $P(x)>0$ .



На оси и ниже

Точки на оси  $Ox$  дают  $P(x)=0$ , а точки ниже оси соответствуют отрицательным значениям. Поэтому для  $P(x)\leq 0$  подходят обе части графика.



Проверка решения

График помогает быстро заметить ошибку в знаках или пропущенный корень. Если ответ не совпадает с видом графика, решение стоит пересмотреть.

# Памятка для решения неравенств

01

Привести к виду  $P(x) \geq 0$

Сначала убери лишние преобразования и запиши неравенство в удобной форме. Так проще увидеть, что нужно искать: нули, разрывы и знаки выражения.

02

Разложить на множители

Разложение помогает сразу найти особые точки. Для многочленов это корни, а для дробей ещё и значения, при которых знаменатель обращается в ноль.

03

Отметить точки на оси

Все найденные корни и разрывы нужно аккуратно нанести на числовую прямую. Именно они делят её на промежутки, где знак не меняется.

04

Определить знак на промежутках

Проверь знак на каждом участке или используй правило смены знака через простые корни. Это позволяет не пропустить нужный промежуток.

05

Записать ответ и проверить

Сверь, входят ли границы, и исключи запрещённые точки. Главная проверка – совпадение ответа с условием неравенства и всеми особыми точками.

# Как выбрать способ и не ошибиться

Для неравенств высших степеней в 9 классе чаще всего подходит метод интервалов после разложения на множители. График и замена переменной помогают проверить и упростить решение.