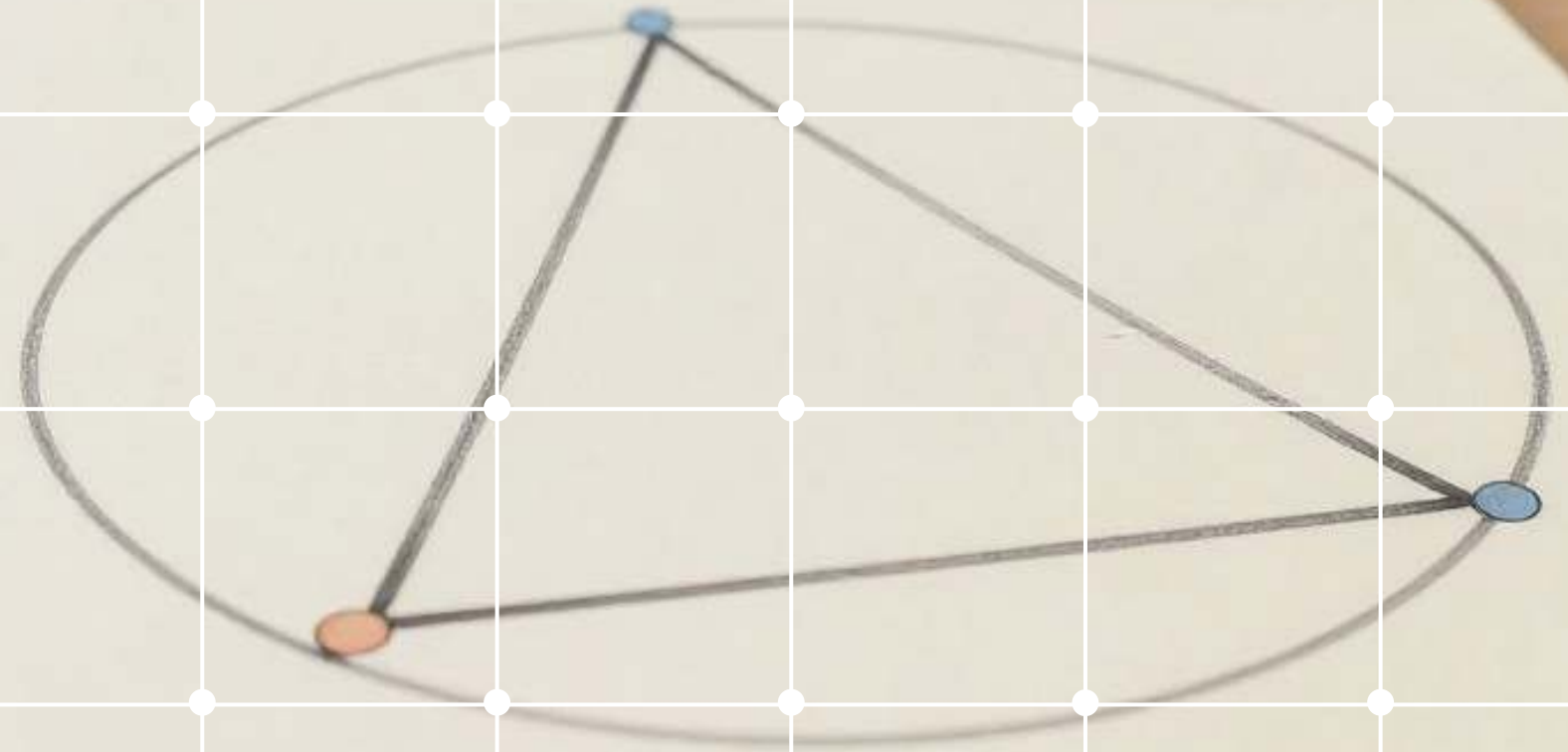


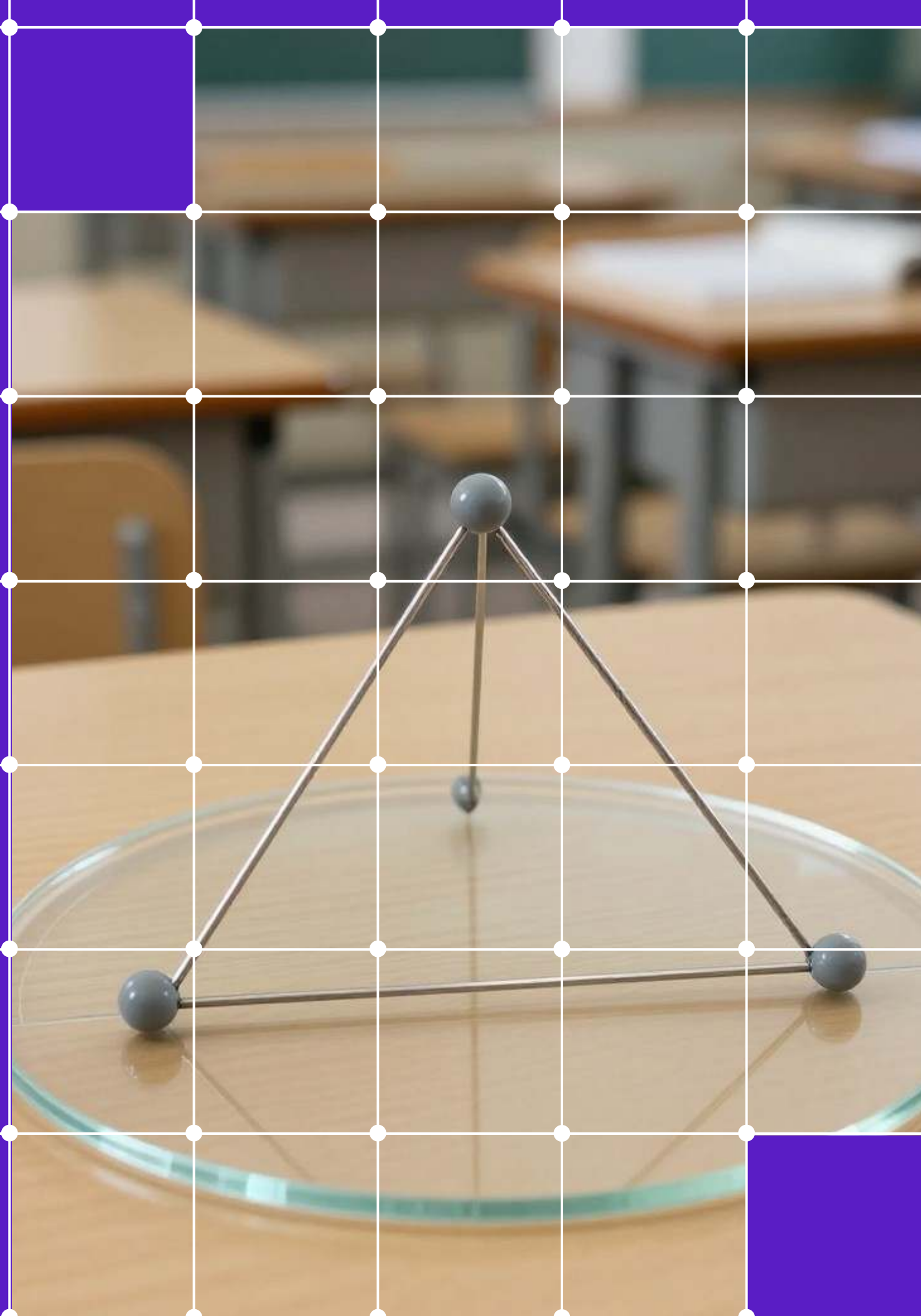
Треугольники, вписанные в окружность

Углы, хорды и дуги в одной геометрической фигуре



Почему эта тема важна

Вписанные треугольники помогают находить углы без измерений, доказывать свойства фигур и решать задачи с окружностью. Эти знания нужны и в школьной геометрии, и в реальных схемах с кругом и точками на нём.



Что значит, что треугольник вписан в окружность

1.

Точки на окружности

Треугольник называют вписанным, если все его вершины лежат на одной окружности. Тогда окружность проходит через каждую вершину и становится общей для всей фигуры.

2.

Описанная окружность

Окружность, проходящую через вершины треугольника, называют описанной около него. Она задаёт удобную опору для работы с углами, хордами и дугами.

3.

Центр окружности

Центр описанной окружности одинаково удалён от всех трёх вершин. Его находят как точку пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

Стороны треугольника как хорды окружности

Каждая сторона — хорда

Если вершины треугольника лежат на окружности, то каждая его сторона соединяет две точки этой окружности и является хордой.

Хорда и дуга

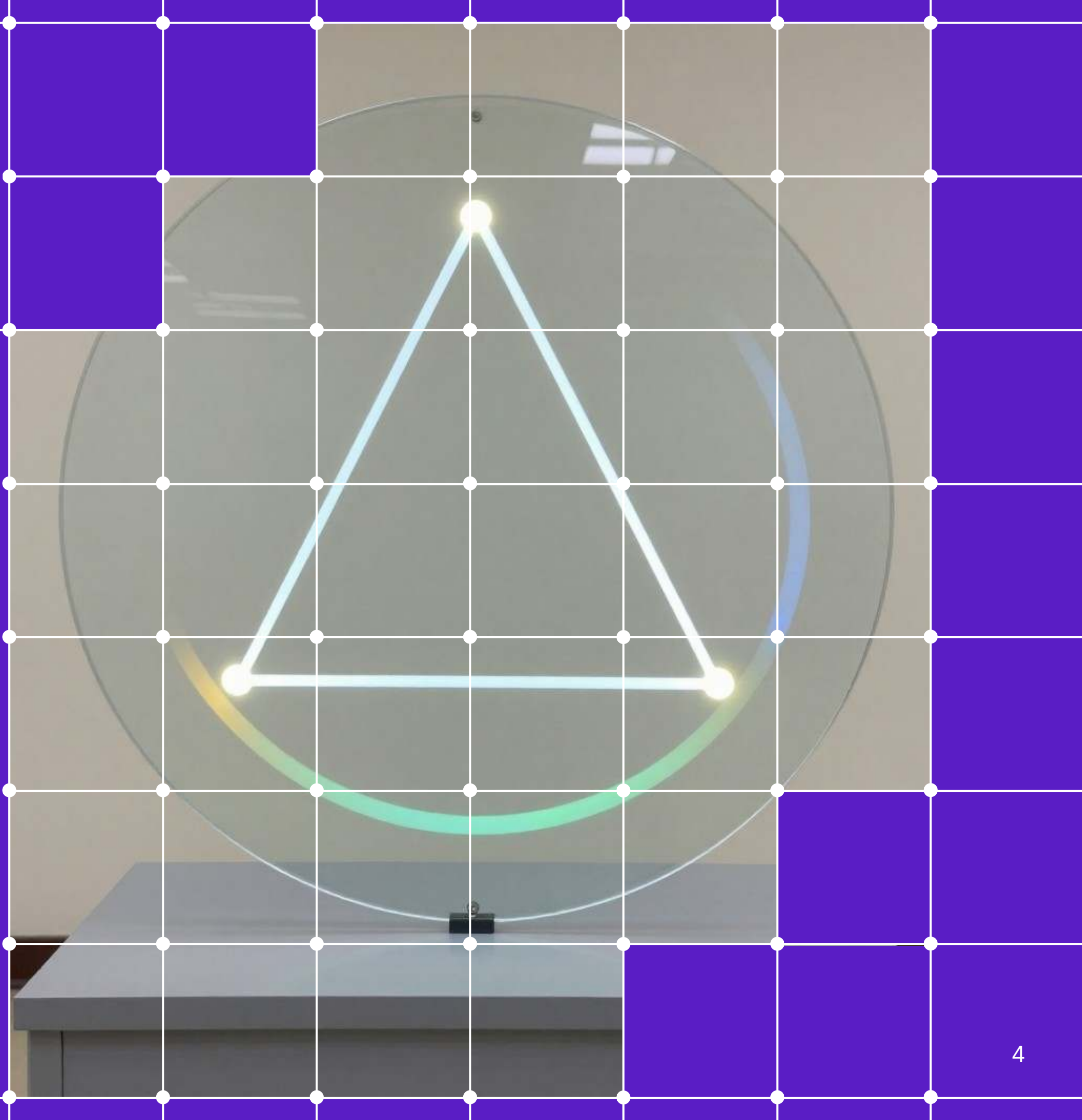
Любая хорда стягивает дугу. Поэтому сторона треугольника всегда связана не только с отрезком, но и с соответствующей дугой окружности.

Где лежит опирающийся угол

Угол треугольника опирается на дугу, которая не содержит его вершину. Именно эта дуга помогает вычислять и сравнивать углы в задаче.

Обозначения на схеме

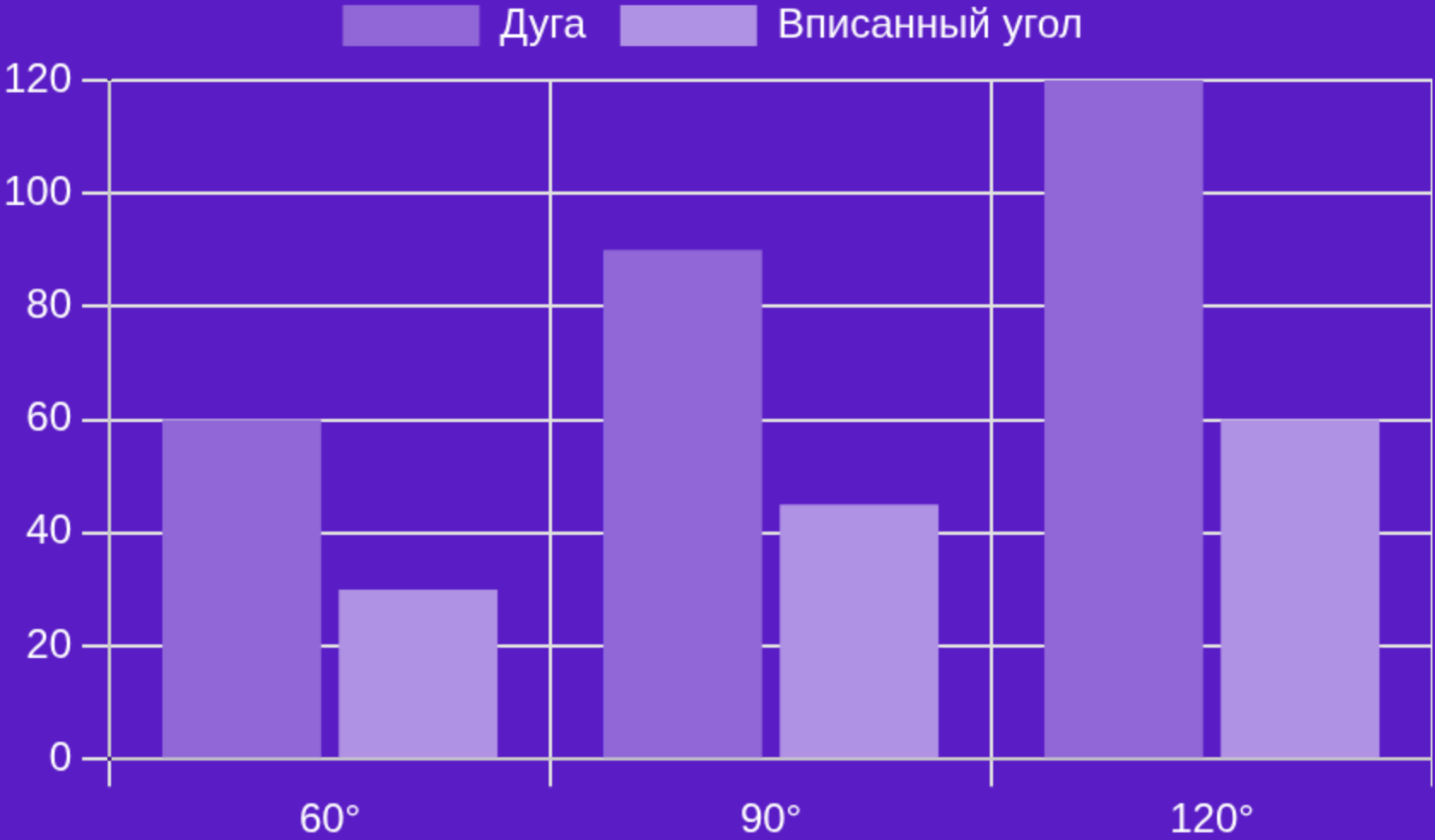
На чертеже обычно отмечают вершины A , B , C , стороны AB , BC , CA и соответствующие дуги, чтобы сразу видеть все связи.



Связь центрального угла, вписанного угла и дуги

Центральный угол показывает размер дуги напрямую, а вписанный угол всегда меньше в два раза. Это позволяет быстро переходить от дуги к углу и обратно.

Главное соотношение темы: центральный угол равен дуге, а вписанный составляет её половину.



Школьный курс геометрии, тема об окружности и вписанных углах.

Основное свойство вписанного угла



Одна дуга

Если два вписанных угла опираются на одну и ту же дугу, то они имеют одинаковую величину. Это свойство удобно для сравнения углов в разных частях окружности.



Проверка равенства

Чтобы сравнить углы, не нужно измерять их транспортиром. Достаточно увидеть, что они опираются на одну дугу, и сразу сделать вывод о равенстве.



Полезный вывод

Это свойство часто становится ключом к решению задач: оно позволяет искать неизвестный угол через уже известный угол на той же окружности.



Связь с точками

Когда на окружности есть несколько точек, один и тот же отрезок-дуга может служить основанием для разных углов. Тогда все такие углы равны.

Связь равных дуг, хорд и углов

Равные дуги

Если дуги на одной окружности равны, то они стягивают равные хорды. Это помогает переносить равенство с части окружности на отрезки внутри фигуры.

Равные хорды

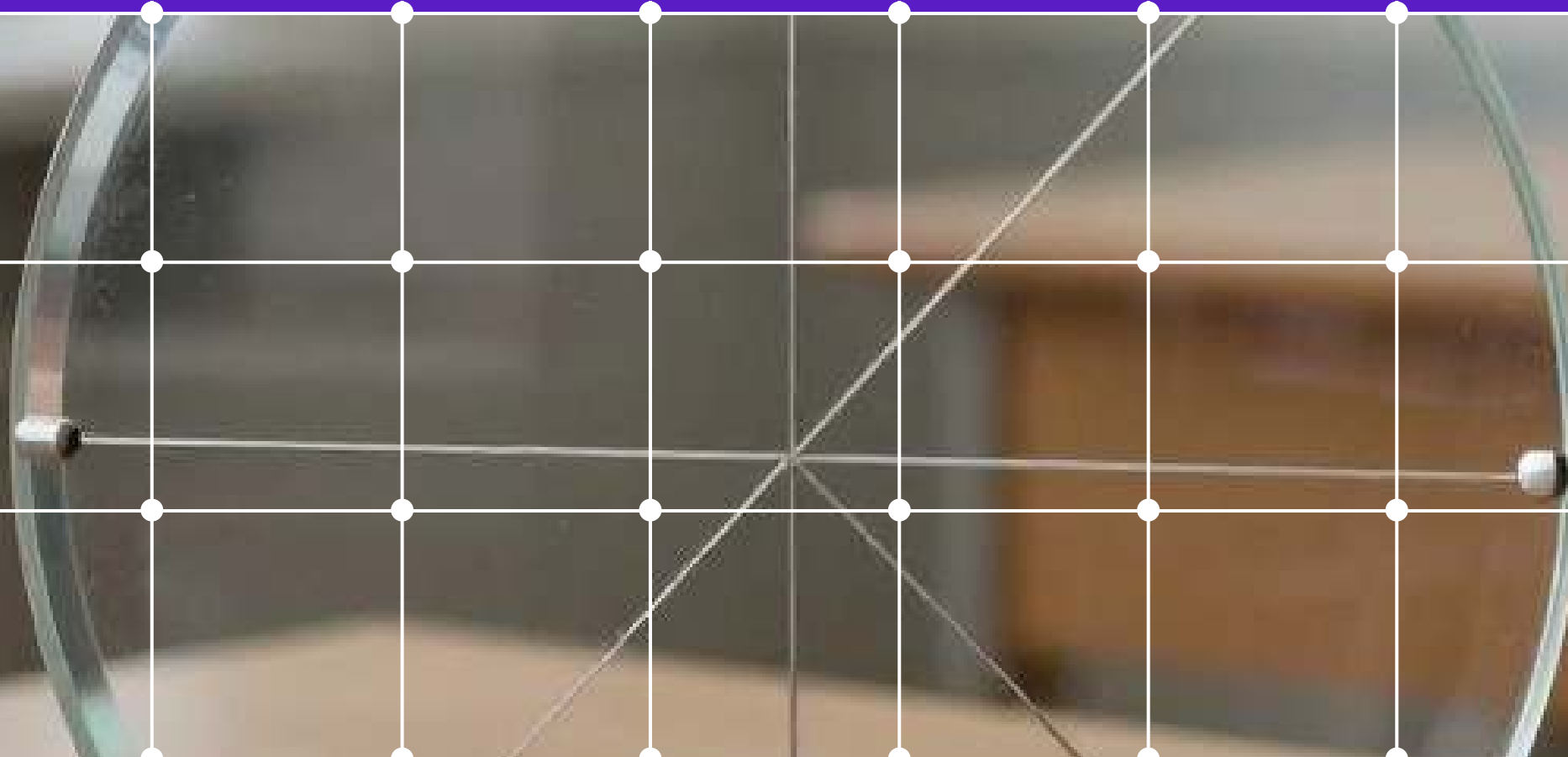
Обратное тоже верно: равные хорды стягивают равные дуги. Так можно распознавать равенство дуг по одинаковым сторонам и наоборот.

Равные вписанные углы

Две равные дуги дают равные вписанные углы, потому что каждый такой угол равен половине своей дуги.

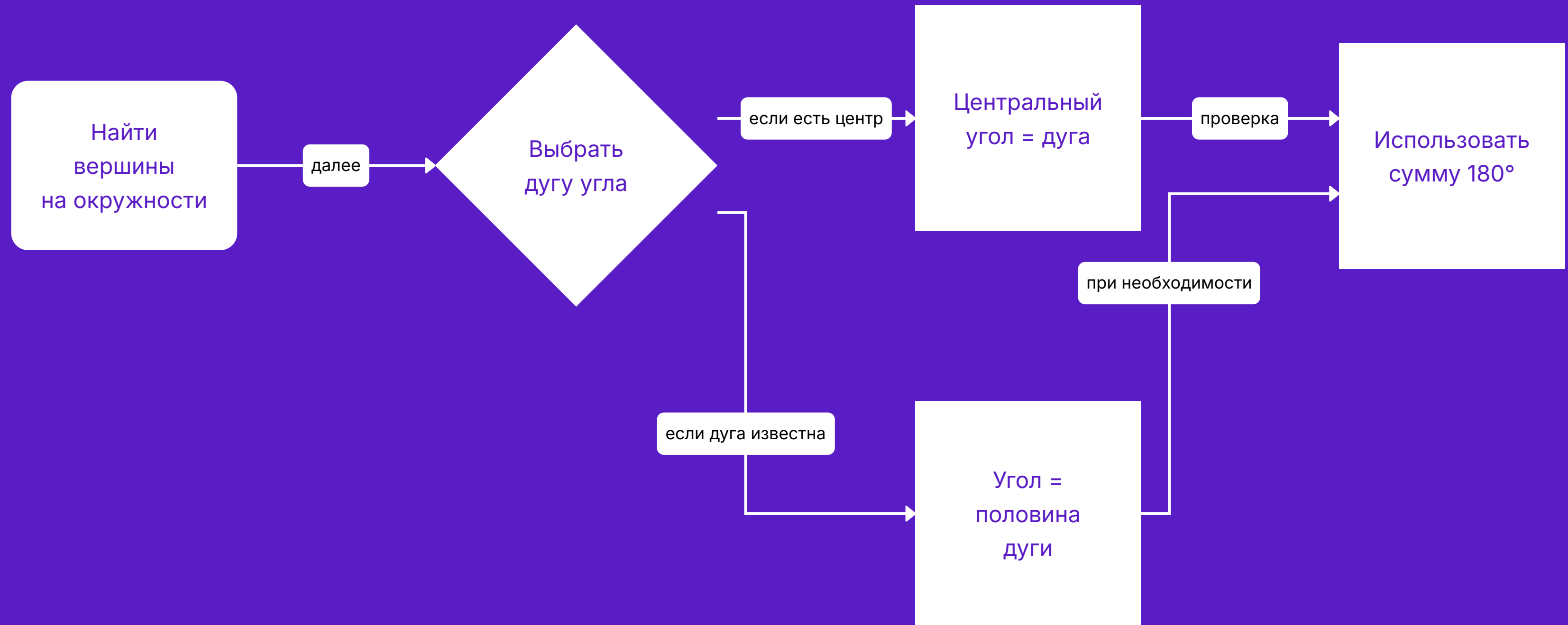
Связь с треугольником

В треугольнике равенство двух сторон приводит к равенству противолежащих углов, а в окружности это часто связано с равенством дуг и хорд.



Алгоритм нахождения угла в вписанном треугольнике

Последовательность рассуждений при решении задач на окружность



Частые случаи и готовые факты

Ситуация	Факт	Польза
Диаметр	Угол 90°	Прямоугольный треугольник
Равные хорды	Равные дуги	Находим дуги
Равные дуги	Равные углы	Сравниваем углы
Серединный перпендикуляр	Проходит через центр	Строим окружность

Эти факты чаще всего встречаются в задачах по теме и позволяют быстро делать выводы без долгих вычислений.

Эти четыре факта закрывают большую часть типовых задач по вписанным треугольникам.

Теорема Фалеса и прямоугольный треугольник

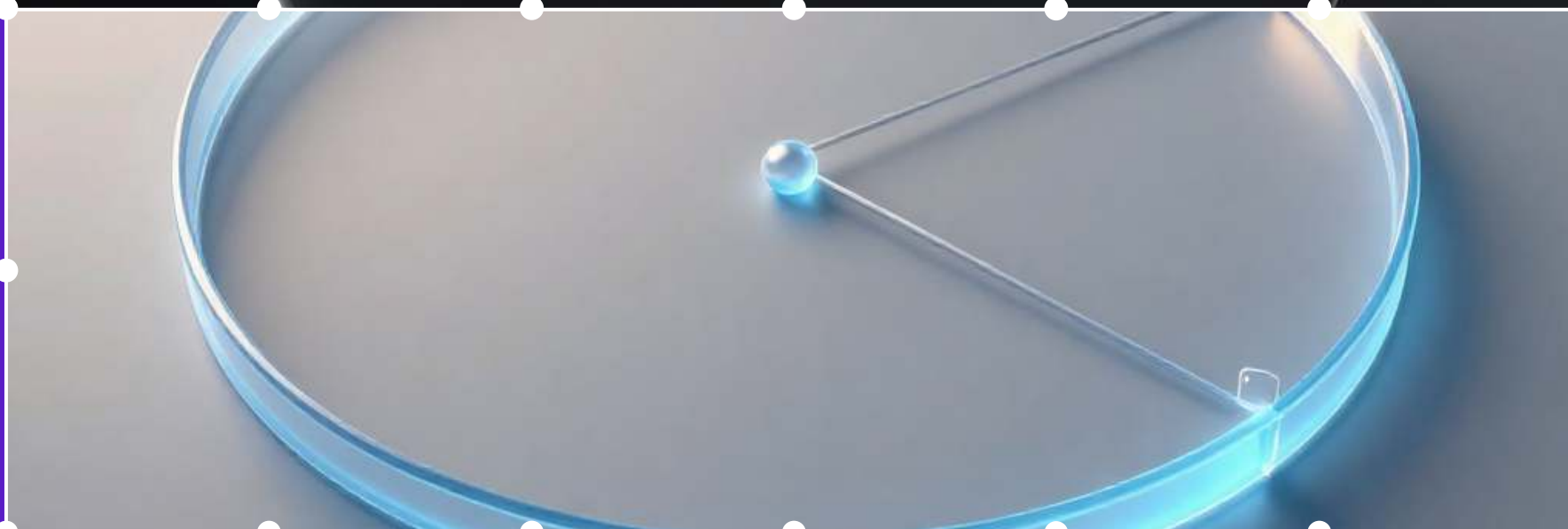
Когда диаметр становится стороной

Если одна сторона треугольника совпадает с диаметром окружности, угол напротив неё обязательно прямой. На чертеже это выглядит как очень сильная подсказка: достаточно заметить диаметр, чтобы сразу увидеть прямой угол в вершине треугольника.



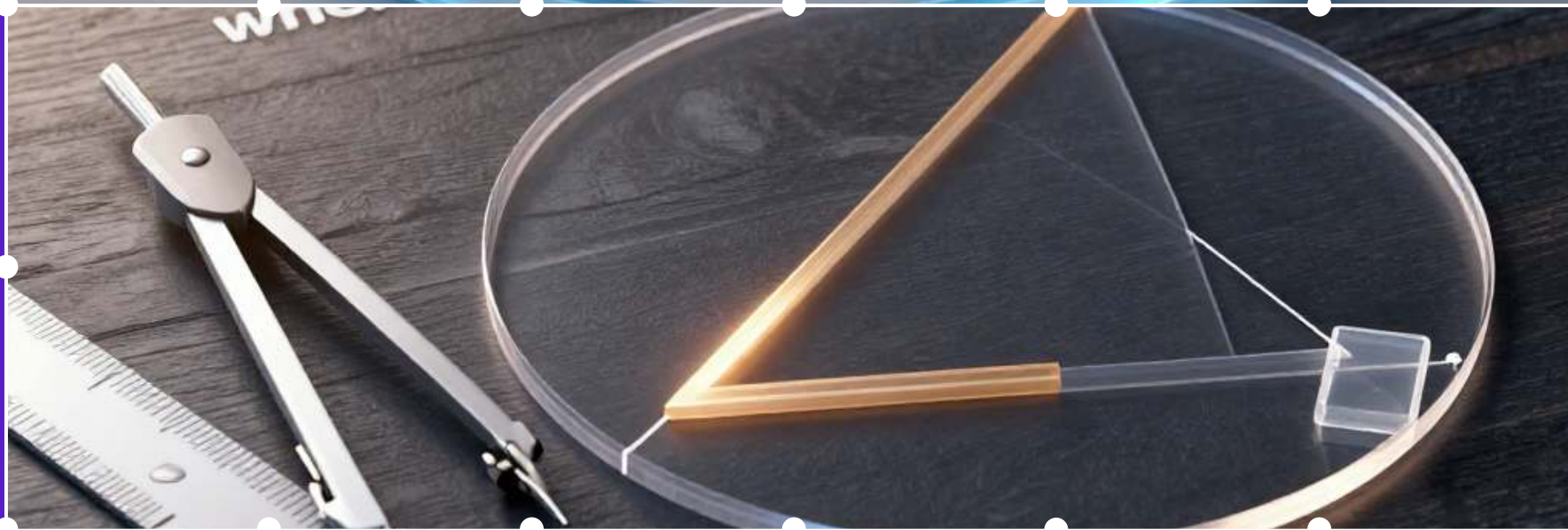
Почему появляется 90°

Диаметр стягивает полуокружность, то есть дугу 180° . Вписанный угол, опирающийся на эту дугу, равен половине, поэтому получается 90° . Именно так частный случай теоремы Фалеса связывает окружность и прямоугольный треугольник.



Где это встречается в задачах

Такой приём часто помогает в построениях и доказательствах, когда нужно распознать прямой угол без измерений. Достаточно увидеть диаметр и вершину на окружности, чтобы сразу использовать теорему Фалеса и продолжить решение.



Где находится центр описанной окружности

1. Остроугольный треугольник

У треугольника с острыми углами серединные перпендикуляры пересекаются внутри фигуры. Поэтому центр описанной окружности тоже оказывается внутри и одинаково удалён от всех трёх вершин.

2. Прямоугольный треугольник

Если один угол прямой, центр описанной окружности лежит на середине гипотенузы. Это удобно запомнить: гипотенуза становится диаметром окружности, проходящей через все вершины.

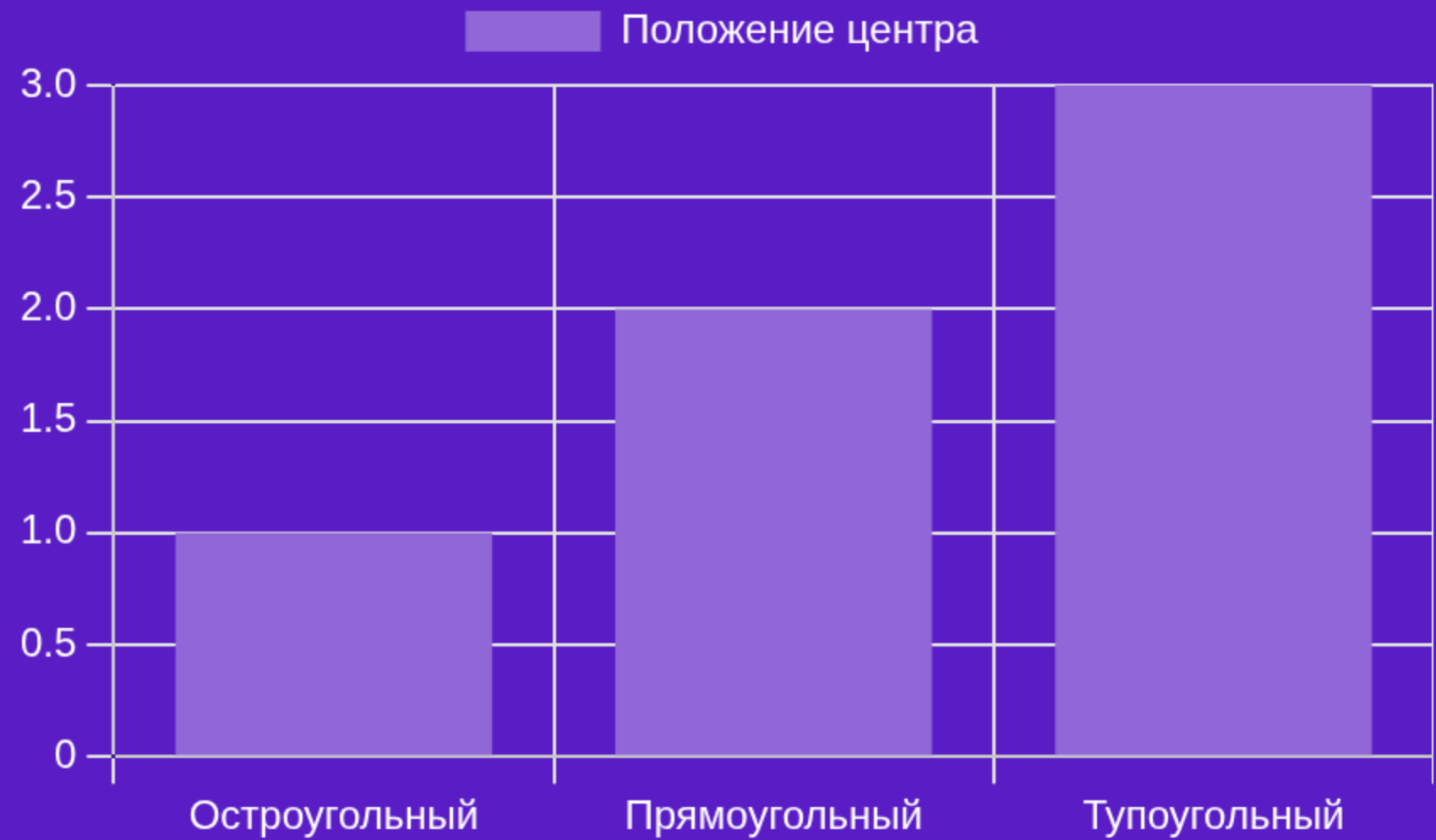
3. Тупоугольный треугольник

Когда у треугольника есть тупой угол, точка пересечения серединных перпендикуляров смещается наружу. Центр описанной окружности находится вне треугольника, хотя остаётся равноудалённым от вершин.

Положение центра описанной окружности в разных треугольниках

Диаграмма показывает не расстояние, а типичное положение центра: чем больше значение, тем дальше центр расположен от самой фигуры.

Положение центра меняется вместе с видом треугольника: внутри, на гипотенузе или вне фигуры. Это помогает быстро ориентироваться в задачах.



Школьный курс геометрии, 9 класс.

Построение описанной окружности

1.

Провести перпендикуляры

Сначала выбирают две стороны треугольника и строят к ним серединные перпендикуляры. Эти прямые делят стороны пополам и пересекаются в одной точке, которая станет центром окружности.

2.

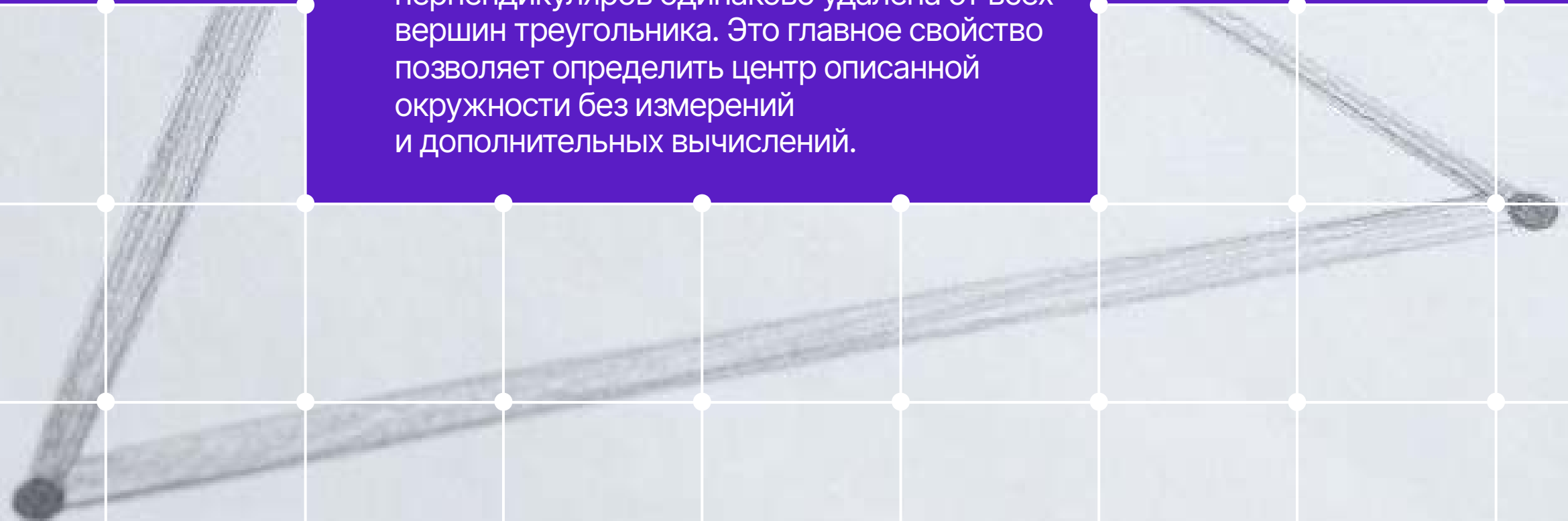
Найти центр

Точка пересечения серединных перпендикуляров одинаково удалена от всех вершин треугольника. Это главное свойство позволяет определить центр описанной окружности без измерений и дополнительных вычислений.

3.

Построить окружность

Затем циркулем проводят окружность с найденным центром и радиусом до любой вершины. Она обязательно пройдет через все три вершины, потому что расстояния до них равны.



Как решать задачи на вписанный треугольник

Последовательность действий при работе с окружностью, хордами и углами



Основные термины и обозначения

Термин	Обозначение	Смысл
Вершины	A, B, C	Точки треугольника
Центр	O	Центр окружности
Хорда	AB	Отрезок на окружности
Дуга	AB	Часть окружности

Школьный курс геометрии, 9 класс.

Эти обозначения помогают читать чертёж без лишних пояснений и быстрее находить нужные элементы фигуры.

Если понимать обозначения, легче отслеживать связи между вершинами, хордами и дугами и не путать элементы на чертеже.

Типичные ошибки при решении задач

Неверная дуга

Угол часто связывают не с той дугой, на которую он действительно опирается. Нужно смотреть именно на дугу, не содержащую вершину этого угла.

Путаница углов

Центральный и вписанный углы легко перепутать из-за похожего положения на рисунке. Помогает проверка: вершина центрального угла находится в центре окружности.

Неполная проверка теоремы Фалеса

Теорему Фалеса можно применять только тогда, когда вершина прямого угла лежит на окружности. Если этого нет, вывод о прямом угле будет неверным.

Смещение точек фигуры

Важно различать вершины треугольника, точки на окружности и внутренние точки. Ошибка в этом месте приводит к неправильным хордам, дугам и углам.

Примеры из реальных объектов

Циферблат и стрелки

На круглом циферблате легко представить треугольник, если соединить несколько отметок на окружности. Тогда вершины лежат на одной окружности, а стрелки помогают видеть углы и их изменения. Такой образ удобно использовать, когда нужно объяснить связь дуги и вписанного угла.



Колесо и спицы

В колесе точки на ободе можно соединить отрезками и получить вписанный треугольник. Спицы и обод создают наглядную модель хорд и диаметра, а равномерность расположения деталей удобно проверять через симметрию окружности.



Круглые детали и разметка

При разметке круглых деталей важно точно ставить метки по окружности. Если соединить их, можно проверить, как расположены углы и равны ли дуги. Такой подход помогает контролировать форму детали и понимать, почему некоторые элементы должны быть симметричными.



Что чаще всего помогает решать задачи по теме

Все три приёма часто работают вместе: один даёт угол, другой — прямой угол, третий помогает завершить вычисление в треугольнике.

Главные инструменты дополняют друг друга и закрывают большинство школьных задач на окружность и вписанные треугольники.



Школьный курс геометрии, 9 класс.

Связь темы с дальнейшими разделами геометрии

1. Новые фигуры

Понимание вписанного треугольника помогает быстрее разбираться во вписанных и описанных четырёхугольниках. Там тоже важно видеть, как углы связаны с окружностью и её дугами.

2. Касательные и хорды

Следующий шаг — изучение касательных, хорд и дуг как единой системы. Эти темы требуют умения замечать равенства, сравнивать углы и делать строгие выводы по рисунку.

3. Задачи повышенной сложности

Навык работы с окружностью пригодится в более трудных задачах, где нужно соединять несколько свойств сразу. Чем увереннее ученик пользуется базовыми фактами, тем легче ему строить доказательства.

Треугольник и окружность: главное запомнить

Вписанный треугольник показывает, как тесно связаны окружность, хорды, дуги и углы. Если помнить правило половины дуги, теорему Фалеса и построение описанной окружности, задачи становятся значительно проще.