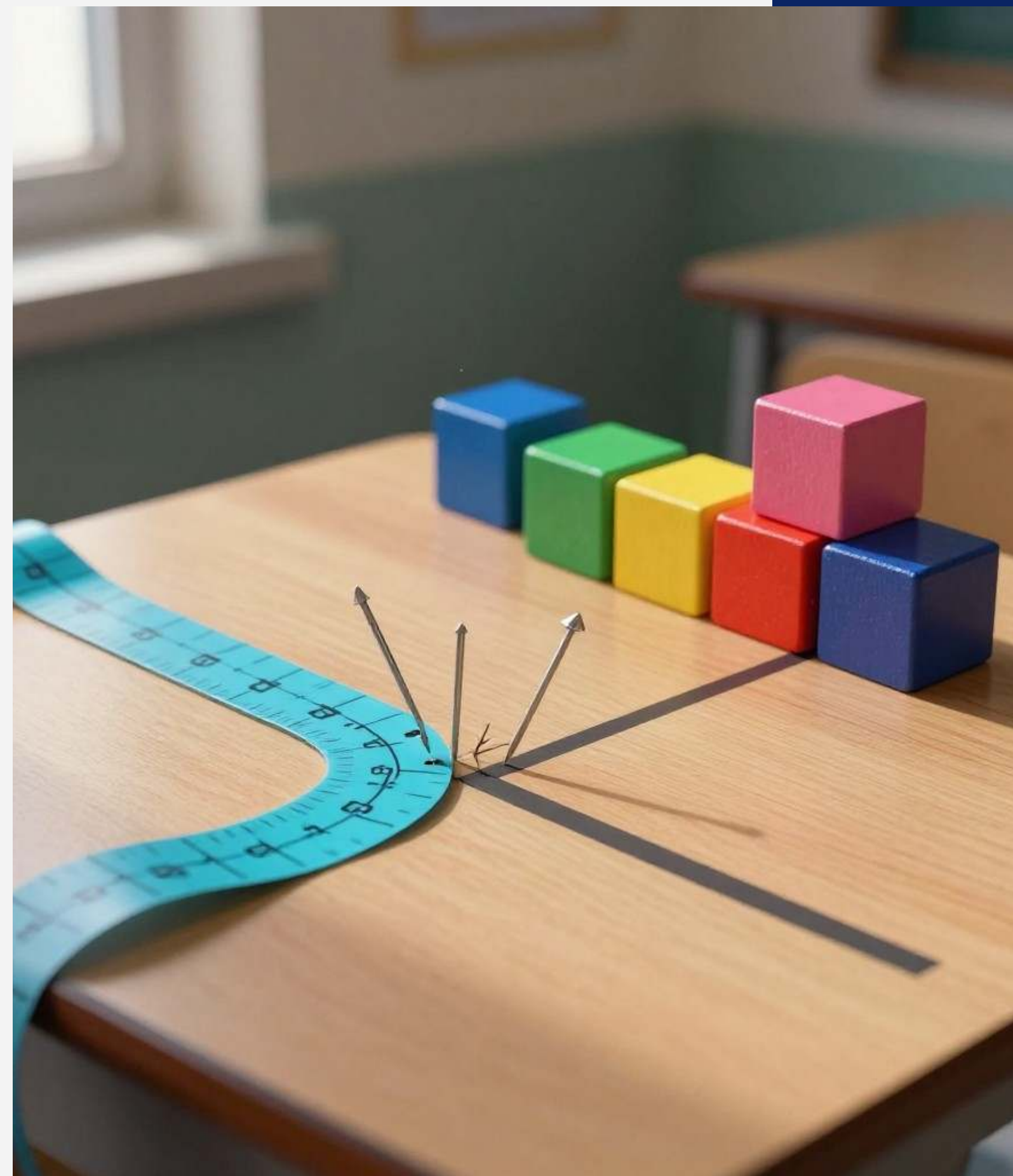


Корни многочленов: от идеи к способам решения

Уравнения, графики и множители — одна идея.



С чего начать изучение корней



Перед началом важно помнить: корень — это значение, при котором многочлен обращается в ноль. Полезно уверенно работать с линейными и квадратными примерами, проверять ответ подстановкой и читать разложение на множители.

Когда многочлен равен нулю

Точка, где ноль

Если подставить значение переменной и получить ноль, многочлен обращается в ноль именно в этой точке. Такие значения и называют корнями.

Что нужно найти

Для уравнения $P(x)=0$ нужно найти все значения x , при которых значение многочлена становится равным нулю. Это и есть полный набор корней.

Сколько бывает ответов

Один и тот же многочлен может иметь несколько корней, а иногда не иметь действительных вовсе. Поэтому ответ всегда проверяют и записывают точно.

1

успешная проверка сразу
подтверждает корень

Определение корня многочлена в школьном
курсе алгебры

**В школьной алгебре достаточно
подстановки одного числа, чтобы
проверить, обращается ли
многочлен в ноль.**

Корни на графике

Пересечение с осью

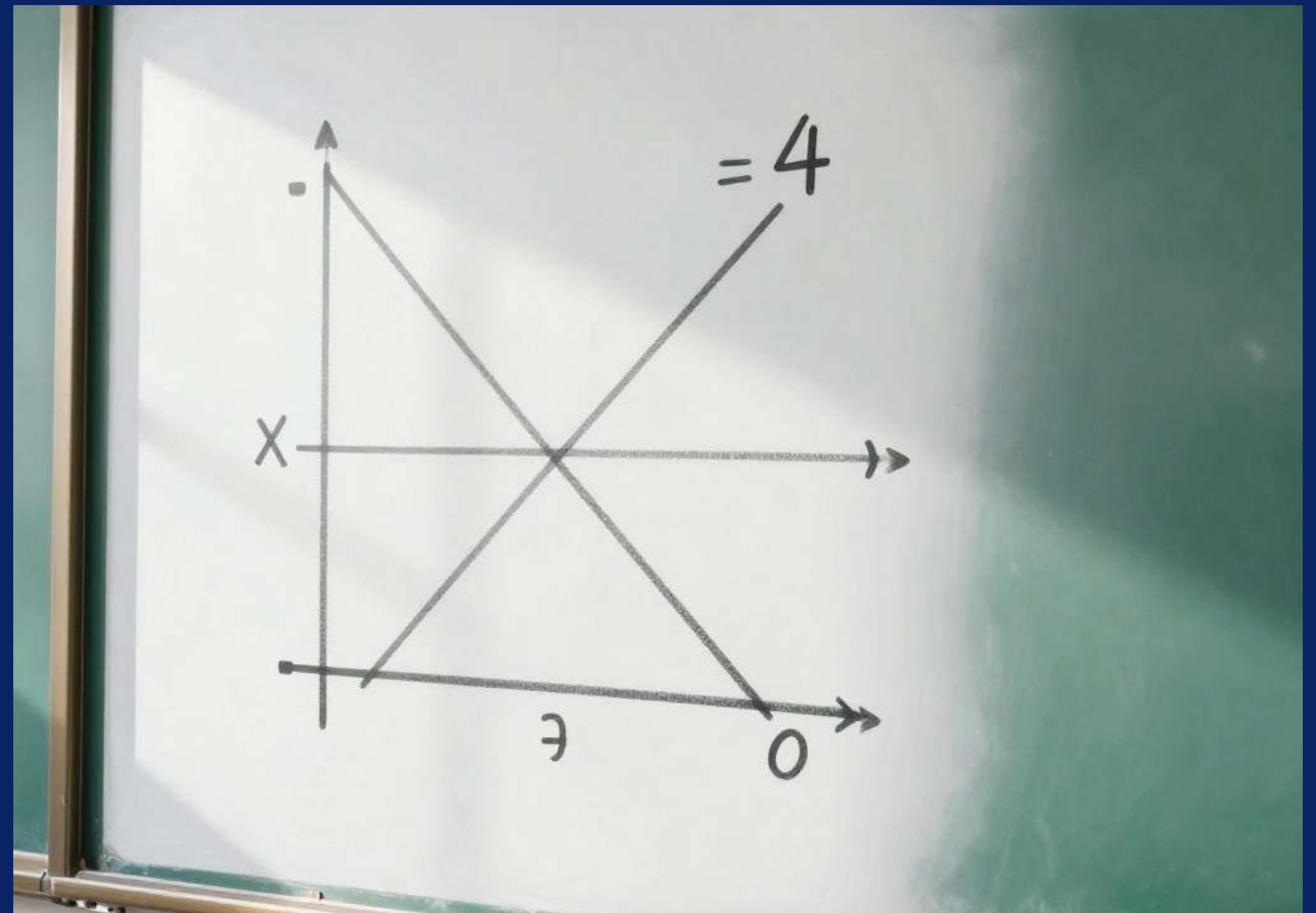
Точки пересечения графика с осью Ox — это места, где значение y равно нулю. Именно здесь у многочлена появляются корни, если они действительные.

Два корня

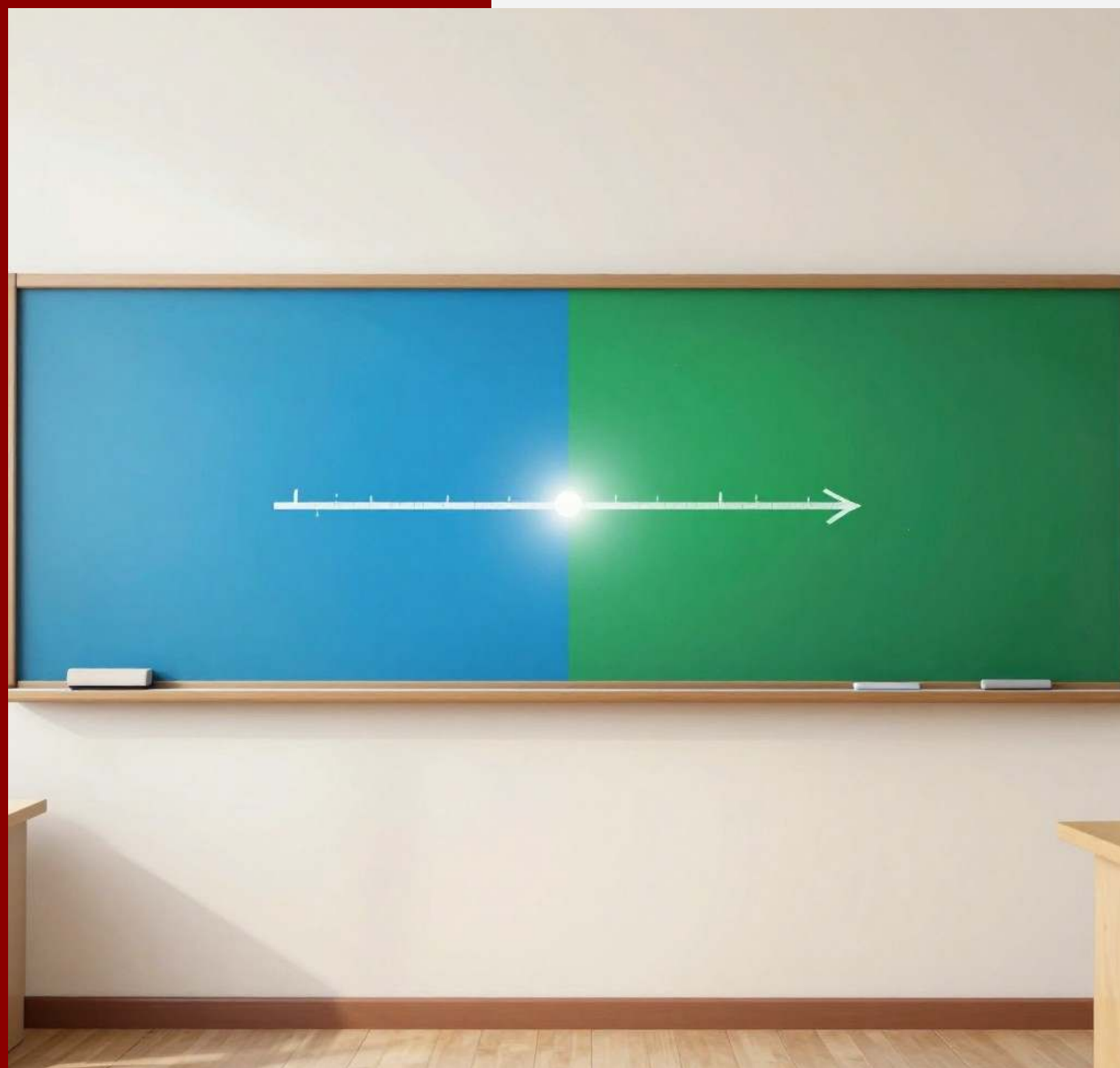
Для многочлена x^2-4 график проходит через ось Ox в двух точках. Это соответствует корням $x=-2$ и $x=2$, которые легко увидеть на рисунке.

Проверка по виду графика

График помогает не только найти ответ, но и проверить его. Если кривая не касается и не пересекает ось, действительных корней нет.



Как корень влияет на знак



01. Слева от корня

Возьмём выражение $x-3$. При x меньше 3 оно отрицательно, потому что из меньшего числа вычитают большее. Это удобно видеть на числовой прямой.

02. В самой точке

В точке $x=3$ значение становится нулём. Именно здесь происходит переход от отрицательных значений к положительным, поэтому корень делит прямую на части.

03. Справа от корня

При x больше 3 выражение $x-3$ положительно. Такой переход знака помогает быстро понимать поведение простых многочленов без долгих вычислений.

Проверка подстановкой

Подстановка	Результат	Вывод
$x=a$	0	корень
$x=a$	не 0	не корень

Подстановка — самый быстрый способ проверить, является ли число корнем многочлена.

Нулевая подстановка подтверждает корень, а ненулевой результат сразу его исключает.

Правило проверки подстановкой из школьной алгебры

Проверка на примере

■ Проверка числа 2

Сначала подставим $x=2$ в $P(x)=x^2-5x+6$. Получаем $4-10+6=0$, значит, число 2 действительно является корнем.

■ Проверка числа 4

Теперь подставим $x=4$. Получаем $16-20+6=2$, то есть ноль не выходит. Значит, 4 не подходит как корень.

■ Зачем перепроверять

Такая проверка особенно полезна после разложения на множители. Она позволяет быстро убедиться, что найденные значения записаны верно.

2

один и тот же множитель
встречается повторно

Разложение на множители в школьном курсе
алгебры

**Кратность показывает, сколько
раз один и тот же корень
повторяется в разложении
многочлена.**

График подсказывает кратность



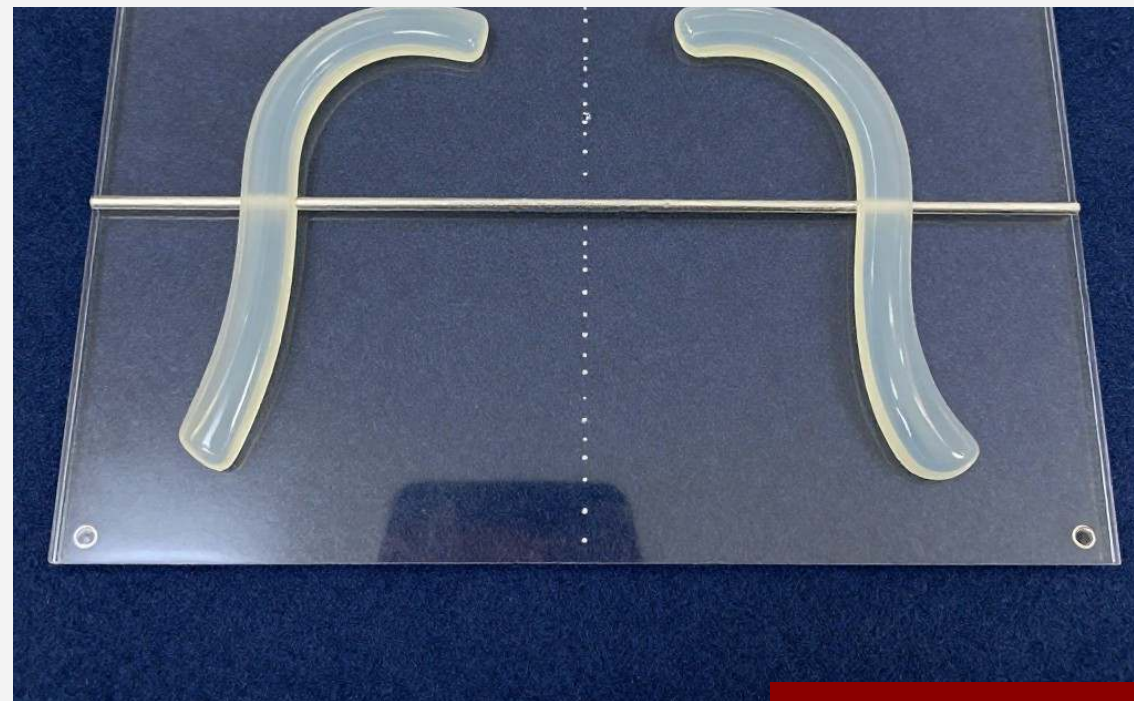
Касание без пересечения

Чётная кратность ведёт себя как осторожный поворот: график подходит к оси Ox , касается её и разворачивается обратно. Поэтому корень виден, но знак по обе стороны обычно не меняется. Так часто выглядит, например, $px-2p2$.



Пересечение и смена знака

При нечётной кратности поведение иное: кривая проходит через ось Ox и меняет знак. Чем больше кратность, тем заметнее «сглаживается» переход около корня. Для $px-2p3$ пересечение сохраняется, но около точки оно становится более пологим.



Как читать форму графика

На одном и том же рисунке можно сравнить оба случая и сразу увидеть разницу. Это помогает не только находить корни, но и понимать их кратность по форме графика. Такой визуальный признак особенно удобен в школьных задачах.

Теорема о факторе

01. Связь с корнем

Теорема о факторе связывает корни и разложение многочлена: если число a обращает $P(x)$ в ноль, то выражение $(x-a)$ обязательно входит в его разложение как множитель.

02. Первый множитель

Для многочлена x^2-5x+6 проверка показывает, что $P(2)=0$. Значит, рядом с ним появляется множитель $(x-2)$, который помогает перейти от уравнения к разложению.

03. Второй множитель

Аналогично, значение $x=3$ тоже делает многочлен равным нулю. Поэтому второй множитель — $(x-3)$, и оба корня видны прямо из записи.

04. Практический смысл

Такое рассуждение особенно удобно в квадратных уравнениях: найденный корень сразу подсказывает один множитель, а затем весь многочлен часто раскладывается полностью.

Корни из разложения на множители

Главное правило

Если многочлен уже записан в виде произведения, достаточно приравнять к нулю каждый множитель отдельно. Это следует из свойства нулевого произведения.

Два корня

Для уравнения $(x-1)(x+4)=0$ первый множитель даёт $x=1$, а второй — $x=-4$. Оба значения являются корнями исходного многочлена.

Преимущество записи

Такой способ особенно полезен, потому что он позволяет находить ответы быстро и без дополнительных преобразований, если разложение уже известно.

Линейный случай: $ax+b=0$

■ Общий приём

Линейное уравнение вида $ax+b=0$ решается напрямую: переносим свободный член и делим на коэффициент при x , если a не равно нулю.

■ Решение примера

Для $3x-12=0$ получаем $3x=12$, а затем $x=4$. Это единственный корень линейного многочлена, потому что график пересекает ось Ox только один раз.

■ Проверка ответа

Проверка обязательна: подставляем $x=4$ и убеждаемся, что $3 \cdot 4 - 12 = 0$. Такой контроль помогает не пропустить вычислительную ошибку.

Почему у линейного многочлена один корень

Одна точка пересечения

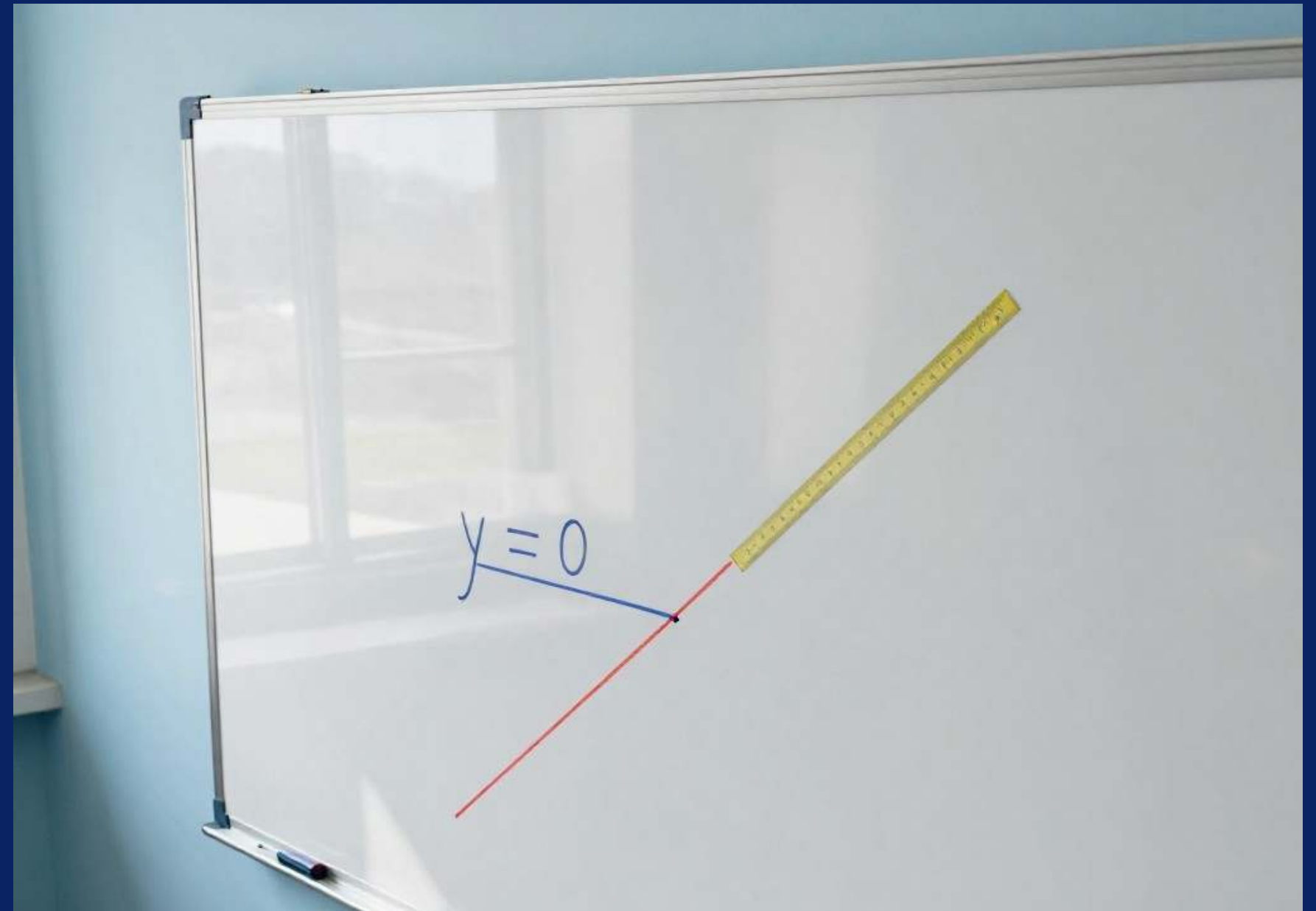
График линейной функции — прямая, поэтому она может пересечь ось Ox только в одной точке. Эта точка и соответствует корню уравнения.

Роль коэффициента a

Коэффициент a задаёт наклон прямой: чем он больше по модулю, тем круче линия. Но число корней от этого не меняется.

Где находится корень

Число $-b/a$ показывает место, где $y=0$. Именно там прямая пересекает ось Ox , поэтому для линейного многочлена корень всегда один.



Квадратный случай через разложение

01. Подбор чисел

Возьмём многочлен x^2+5x+6 и попробуем разложить его на два множителя. Нужно подобрать числа, которые в сумме дают 5, а в произведении — 6.

02. Разложение

Подходящая пара — 2 и 3. Поэтому $x^2+5x+6 = (x+2)(x+3)$, и запись сразу показывает структуру уравнения.

03. Нахождение корней

Теперь каждый множитель приравниваем к нулю: $x+2=0$ или $x+3=0$. Отсюда корни равны -2 и -3 .

04. Почему это удобно

Этот способ экономит время: вместо длинных вычислений достаточно заметить удачное разложение. Для многих квадратных уравнений это самый быстрый путь.

Ещё один способ для квадратных уравнений

Поиск простых корней

Не каждое квадратное уравнение удобно раскладывается сразу. Тогда сначала проверяют простые числа, чтобы найти возможный корень и упростить дальнейшие вычисления.

Запасной способ

Если подходящее разложение не найдено, используют формулу корней квадратного уравнения. Она даёт точный ответ для любых действительных корней.

Что ожидать заранее

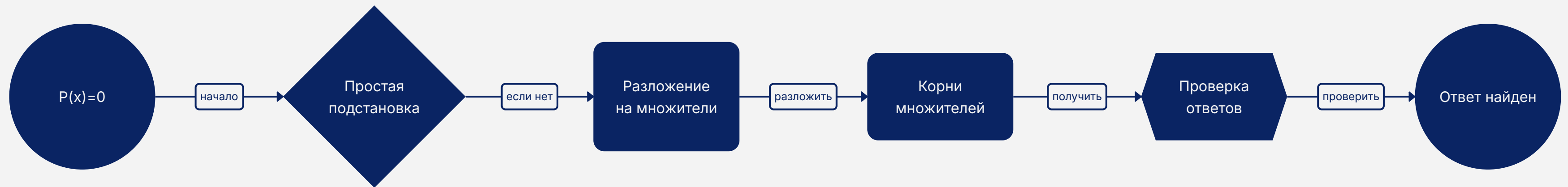
Для $x^2 - 4x + 1$ формула показывает два действительных корня. По виду уравнения можно заранее ожидать, что они будут разными и нецелыми.

Проверка здравым смыслом

Даже без точного вычисления можно оценить ответ: сумма корней связана с коэффициентом при x , а произведение — со свободным членом.

Алгоритм поиска и проверки

Пошаговый путь от уравнения к корням и контролю ответа



Тренировка: разные типы заданий

Короткие задания помогают увидеть разные ситуации: разложение, кратность корня и проверку подстановкой. Во всех случаях важно не только найти ответ, но и объяснить, почему он верен.

Разложение сразу даёт корни, степень множителя показывает кратность, а подстановка быстро подтверждает или опровергает ответ.

Задание	Ответ
$(x-5)(x+2)=0$	5; -2
$(x-3)^k$	3, кратность k
x^2-3x+1 при $x=1$	не корень

Примеры из темы корней многочленов

Найти недостающий множитель

■ Используем корень

Если известно, что корень равен -1 , значит при подстановке $x=-1$ хотя бы один множитель должен стать нулём. Это и задаёт условие для поиска неизвестного параметра.

■ Условие на множитель

В выражении $(x-4)(x+a)$ первый множитель при $x=-1$ не равен нулю, поэтому ноль должен дать второй множитель. Получаем $-1+a=0$.

■ Находим параметр

Отсюда $a=1$. Такая задача показывает, что корень и множитель связаны напрямую: если найден один из них, второй можно восстановить.

Итоги: корни, проверка, множители

Корни многочленов показывают, при каких значениях переменной выражение становится нулём. Их ищут подстановкой, через разложение на множители и с обязательной проверкой, чтобы уверенно получить правильный ответ.