

Свойства степени с целым показателем

Степени помогают считать быстрее и записывать выражения короче.



Зачем изучать степени в 7 классе

Степени позволяют компактно записывать числа и упрощать выражения. На этом этапе важно освоить основные свойства, чтобы уверенно работать с вычислениями, буквенными формулами и преобразованиями в алгебре.



Определение степени с целым показателем

Натуральный показатель

Если показатель натуральный, степень означает повторное умножение одного и того же числа. Например, a^n — это произведение n одинаковых множителей, где основание повторяется нужное число раз.

1

Нулевая степень

Нулевая степень определена отдельно: $a^0 = 1$, если $a \neq 0$. Это правило нужно, чтобы свойства степеней сохранялись при изменении показателя и все преобразования оставались согласованными.

2

Отрицательный показатель

Отрицательная степень означает обратное число: $a^{-n} = 1/a^n$, где $a \neq 0$. Основание показывает число, а показатель — как его использовать: умножать, не изменять или брать обратное значение.

3

Три вида показателя степени

Вид	Смысл	Пример	Результат
Положительный	Повторное умножение	2^3	8
Нулевой	Ненулевое основание	7^0	1
Отрицательный	Обратное число	5^{-2}	$1/25$

Определения степени с целым показателем и примеры вычислений

Таблица показывает, как знак показателя влияет на значение степени и способ вычисления.

Знак показателя меняет не только запись, но и сам способ нахождения значения степени.

Произведение степеней с одинаковым основанием

01

Главное правило

Если основания одинаковые, при умножении степеней показатели складываются: $a^m \cdot a^n = a^{(m+n)}$. Это удобно, потому что длинное произведение одинаковых множителей можно заменить одной степенью.

02

Числовой пример

Например, $3^2 \cdot 3^4 = 3^6$. Сначала сохраняется основание, затем складываются показатели, после чего выражение можно вычислить: $3^6 = 729$.

03

Буквенная запись

Правило работает и для букв: $x^5 \cdot x^2 = x^7$. Такое преобразование помогает сокращать выражения и быстрее переходить к удобному виду без лишних повторений.

Деление степеней с одинаковым основанием

Основное правило

При делении степеней с одинаковым основанием показатели вычитаются: $a^m : a^n = a^{m-n}$, если $a \neq 0$. Это связано с сокращением одинаковых множителей в числителе и знаменателе.

1

Когда показатель уменьшается

Если показатель в делителе больше, результат получается с отрицательной степенью. Так запись остаётся точной даже тогда, когда после вычитания получается число меньше нуля.

2

Примеры вычислений

Например, $2^7 : 2^3 = 2^4 = 16$.
А если $5^2 : 5^6$, то получаем $5^{-4} = 1/625$. Здесь отрицательный показатель показывает переход к дроби.

3

Возведение степени в степень

01

Смысл правила

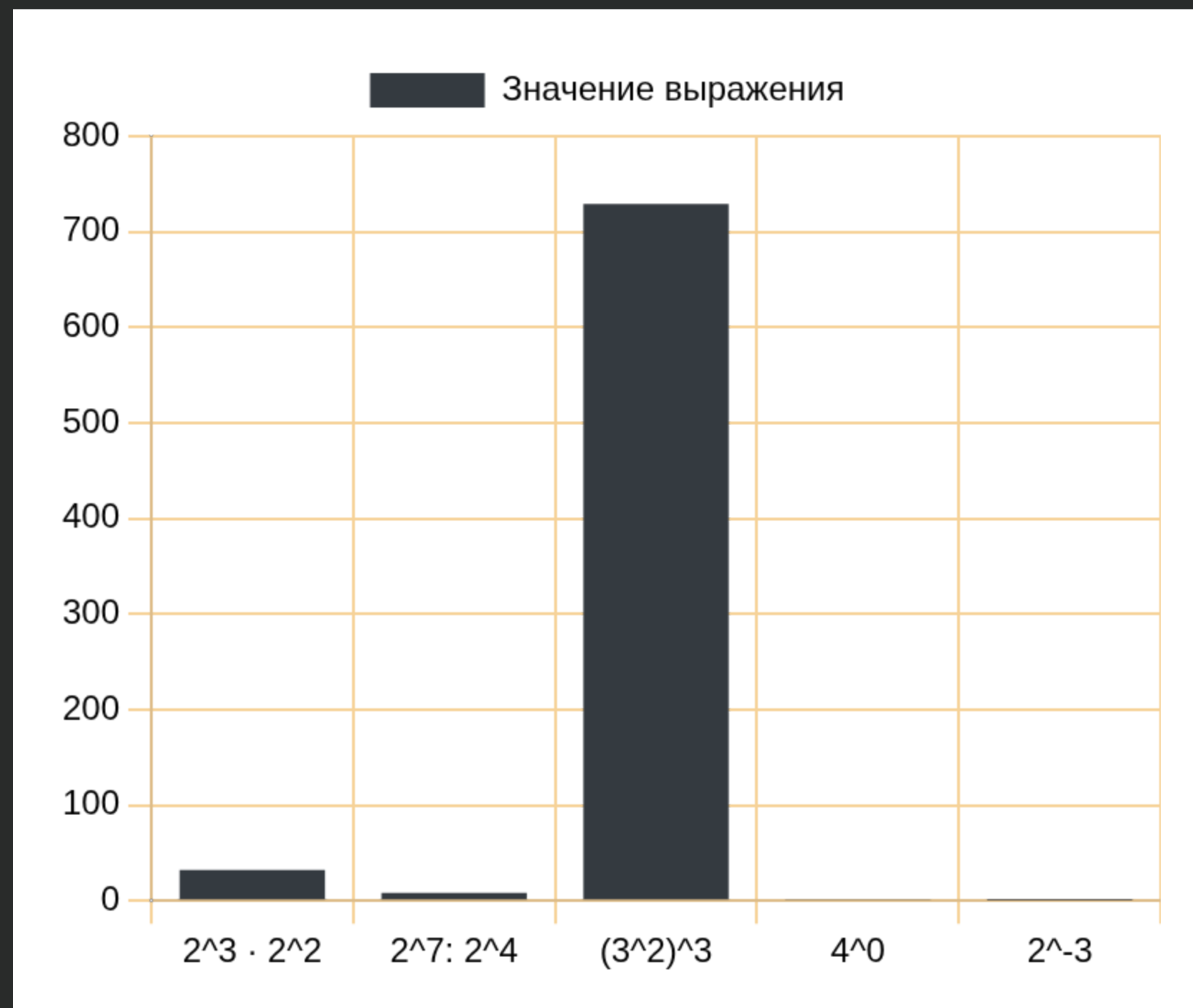
При возведении степени в степень показатели перемножаются: $(a^m)^n = a^{(mn)}$. Внешняя степень относится ко всей внутренней степени, поэтому действия с показателями выполняются последовательно.

02

Пример и запись

Например, $(2^3)^4 = 2^{12} = 4096$. В буквенной записи это выглядит так: $(x^2)^5 = x^{10}$. Такое правило помогает не раскрывать каждую скобку отдельно.

Как меняются результаты по свойствам степеней



На диаграмме сопоставлены выражения с разными типами результата: целое число, единица и дробное значение.

Положительные показатели обычно увеличивают значение, нулевая степень даёт 1, а отрицательная переводит результат в дробь.

Расчёты по свойствам степеней: $2^3 \cdot 2^2 = 32$, $2^7 : 2^4 = 8$, $(3^2)^3 = 729$, $4^0 = 1$, $2^{-3} = \frac{1}{8}$

Степень произведения и дроби

Произведение в скобках

Если в скобках произведение, степень распределяется на каждый множитель: $(ab)^n = a^n b^n$. Это позволяет раскрывать скобки и считать по частям, не теряя точность.

Дробь в скобках

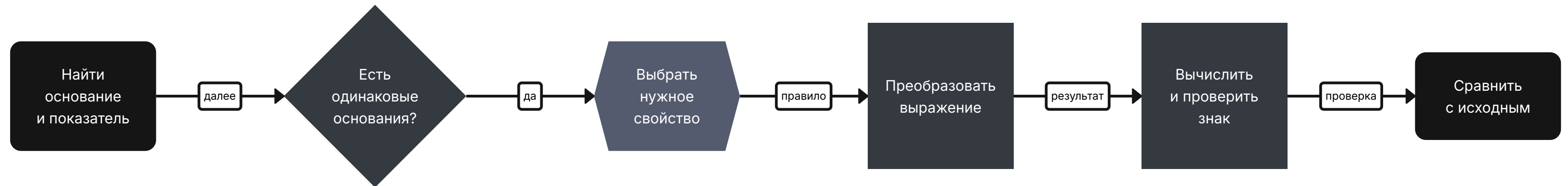
Для дроби действует похожее правило: $(a/b)^n = a^n/b^n$, где $b \neq 0$. Степень одинаково применяется и к числителю, и к знаменателю.

Удобные примеры

Например, $(2 \cdot 5)^3 = 2^3 \cdot 5^3 = 1000$. А $(\frac{3}{4})^2 = 9/16$. Эти преобразования особенно полезны, когда нужно быстро упростить выражение.

Как упрощать выражения со степенями

Последовательность действий для применения свойств степени с целым показателем



Нулевая и отрицательная степень на числовой прямой



Положительные степени

При положительном показателе число растёт за счёт повторного умножения: $2^3 = 8$. На числовой прямой такие значения расположены правее единицы и помогают увидеть увеличение результата.

1

Нулевая степень

Когда показатель уменьшается до нуля, значение становится равным 1 при ненулевом основании. Это промежуточная точка между ростом и делением, хорошо заметная на схеме.

2

Отрицательные степени

При переходе к отрицательным показателям число превращается в дробь: $2^{-1} = \frac{1}{2}$, $2^{-2} = \frac{1}{4}$. Чем меньше показатель, тем меньше значение степени.

3

1

получается при делении любой ненулевой степени на саму себя.

Из свойства a^m : $a^m = a^0$ следует, что нулевая степень должна давать именно это значение, иначе правила степеней нарушатся.

Свойство деления степеней с одинаковым основанием: $a^m : a^m = a^{(m-m)}$

Типичные ошибки при работе со степенями

В таблице показаны самые частые неверные действия и правильные способы вычисления.

Ошибка	Почему неверно	Верный ответ
$2^3 + 2^4 = 2^7$	Степени не складывают	$8 + 16 = 24$
$(2^3)^2 = 2^5$	Показатели перемножают	$2^6 = 64$
$3^{-2} = -9$	Отрицат. степень — дробь	$1/9$

Ошибки связаны с переносом правил умножения на сложение и с неверным пониманием отрицательного показателя.

Правила степеней с целым показателем

Примеры упрощения выражений

01

Одинаковое основание

В выражении $3^4 \cdot 3^{-2}$ показатели складываются: $4 + (-2) = 2$. После преобразования получаем $3^2 = 9$, то есть короткую и удобную запись.

02

Деление степеней

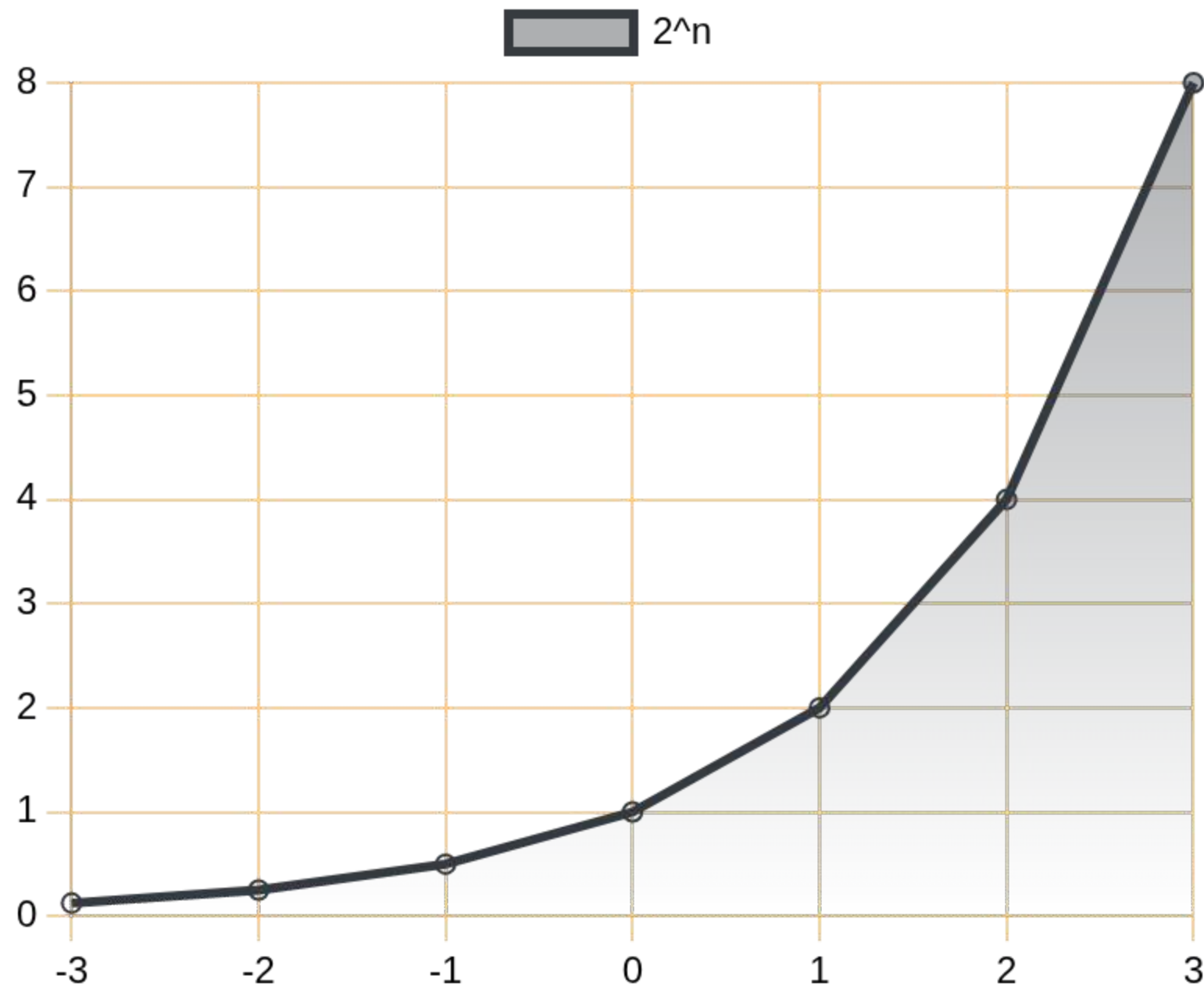
В примере $5^6 : 5^8$ показатели вычитаются: $6 - 8 = -2$. Отрицательная степень означает дробь, поэтому результат равен $1/25$.

03

Степень степени

Для выражения $(x^2)^3$ внешняя степень умножает внутренний показатель: $2 \cdot 3 = 6$. Получается x^6 , что особенно удобно в буквенных выражениях.

Как изменяется значение степени при изменении показателя

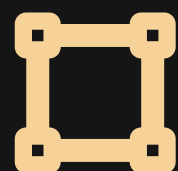


Ряд значений показывает симметрию между отрицательными и положительными показателями и помогает быстро оценивать результат без полного вычисления.

При увеличении показателя на 1 значение удваивается; нулевой показатель служит точкой перехода между дробями и целыми числами.

Числовой ряд степеней числа 2: 2^{-3} , 2^{-2} , 2^{-1} , 2^0 , 2^1 , 2^2 , 2^3

Где встречаются степени с целым показателем



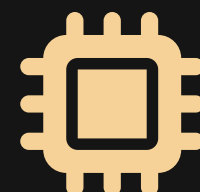
Геометрия

В геометрии показатели 2 и 3 встречаются в формулах площади и объёма. Квадратные и кубические единицы помогают понимать, как измеряются поверхности и пространства.



Запись чисел

Степени удобно используют для записи очень больших и очень маленьких чисел. Например, $10^3 = 1000$, а $10^{-3} = 0,001$, поэтому запись становится короче и нагляднее.



Физика и информатика

В физике и информатике степени помогают сравнивать величины и записывать данные компактно. Это особенно полезно, когда числа слишком большие или слишком маленькие для обычной записи.

Что нужно уметь после изучения темы

Различать части степени

Важно уверенно находить основание и показатель степени, чтобы правильно читать запись и не путать значение числа с количеством множителей.

1

Применять основные правила

Нужно уметь использовать свойства при умножении и делении степеней, а также при возведении степени в степень, не смешивая их между собой.

2

Понимать нулевую и отрицательную степень

Следует объяснять, почему $a^0 = 1$ при $a \neq 0$, и как отрицательный показатель превращает степень в обратное число.

3

Проверять себя на примерах

Полезно тренироваться на выражениях $4^2 \cdot 4^3$, $6^5 : 6^2$, $(2^2)^4$ и 9^{-1} , чтобы быстро замечать ошибки в преобразованиях.

4

Связь отрицательной степени и обратного числа

Пара к числу

Отрицательная степень показывает, что число нужно заменить обратным: 3 превращается в $1/3$, 5 — в $1/5$. Это удобно при работе с дробями и делением степеней.

Чем больше модуль

Если показатель становится более отрицательным, значение уменьшается ещё сильнее: 2^{-1} больше, чем 2^{-2} . Так видно, как меняется величина при каждом шаге.

Общее правило

Запись $a^{-n} = 1/a^n$ действует только при $a \neq 0$. Она связывает степень с делением и помогает быстро получать дробный результат без лишних вычислений.



Все свойства степеней в одной таблице

Свойство	Условие	Результат
$a^m \cdot a^n$	одно осн.	$a^{(m+n)}$
$a^m : a^n$	$a \neq 0$	$a^{(m-n)}$
$(a^m)^n$	без доп. условий	$a^{(mn)}$
$a^0; a^{-n}$	$a \neq 0$	1; $1/a^n$

Формулы свойств степени с целым показателем

Таблица собирает основные правила, которые чаще всего используют при упрощении выражений со степенями.

Все правила сводят длинные записи к более коротким и помогают выполнять вычисления быстрее и аккуратнее.

Степени: короткая запись, понятные правила

Свойства степени с целым показателем делают вычисления понятнее и быстрее. Если помнить значения положительных, нулевых и отрицательных степеней, можно уверенно упрощать выражения и проверять ответы.