

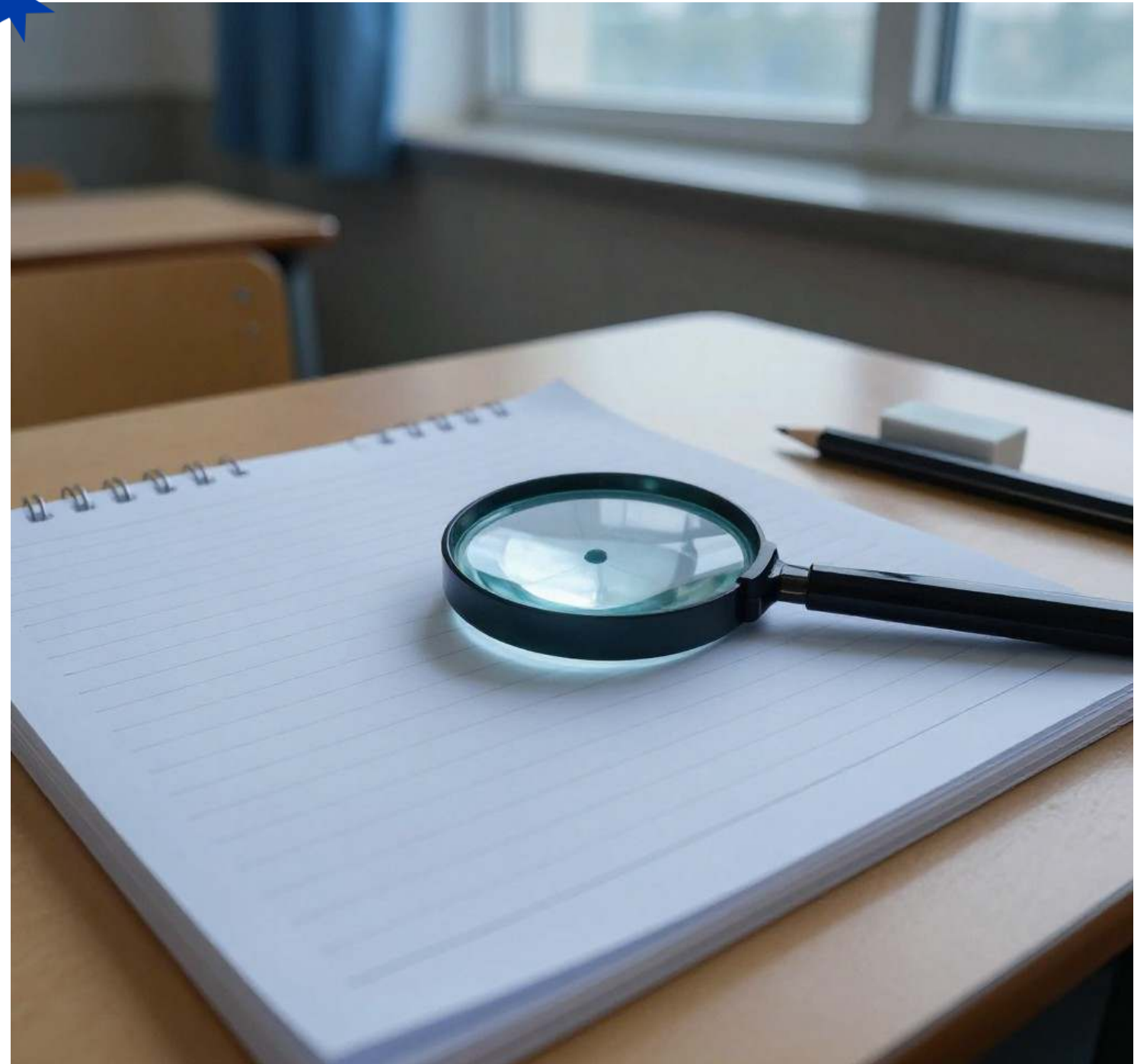
Правила дифференцирования: шпаргалка и практика

Формулы, приёмы и примеры для уверенного
вычисления производных.



С чего начинается работа с производной

Производная — это язык изменения функции. Чтобы уверенно считать её, нужно знать линейность, правило степени, произведения, частного, цепочки и производные основных функций.



Зачем нужна производная

Скорость изменения

Производная показывает, насколько быстро меняется величина. Поэтому её используют в задачах о движении, росте, убывании и сравнении изменений на графиках.

Касательная к графику

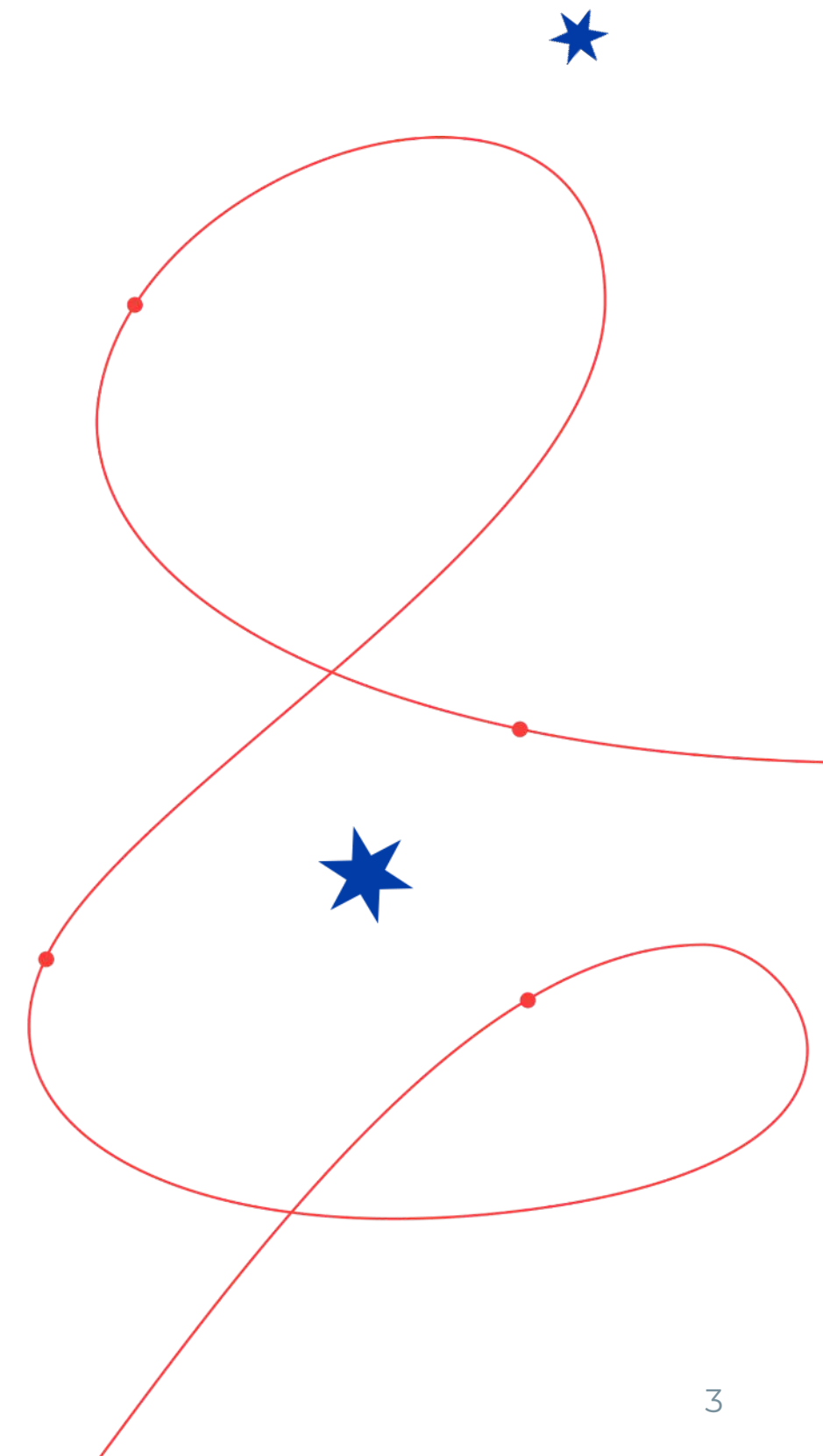
В точке касания она задаёт наклон прямой, которая лучше всего приближает график функции. Это помогает понимать поведение функции локально, без полного построения.

Рост и убывание

По знаку производной находят интервалы роста и убывания, а также точки, где функция меняет характер. Это основа исследования функции в школе.

Типовые задачи

На экзаменах чаще всего встречаются суммы, произведения, частные и сложные выражения. Поэтому важно не только знать формулы, но и быстро узнавать тип конструкции.



Определение и обозначения

1. Разные записи

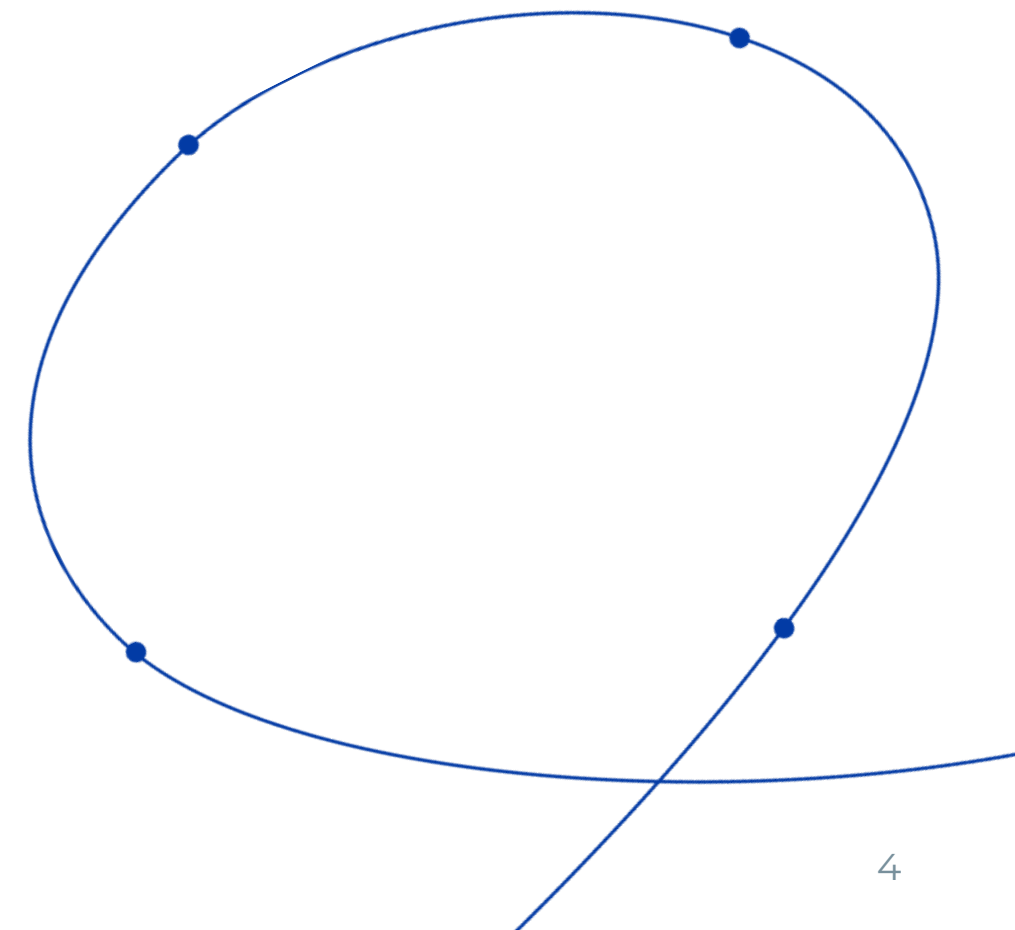
Для функции $y=f(x)$ производная записывается несколькими способами: $f'(x)$, dy/dx и $d/dx f(x)$. Все они обозначают одну и ту же величину.

2. Смысл в точке

В точке x_0 производная описывает мгновенное изменение функции. Она показывает, как быстро растёт или убывает значение при очень малом изменении аргумента.

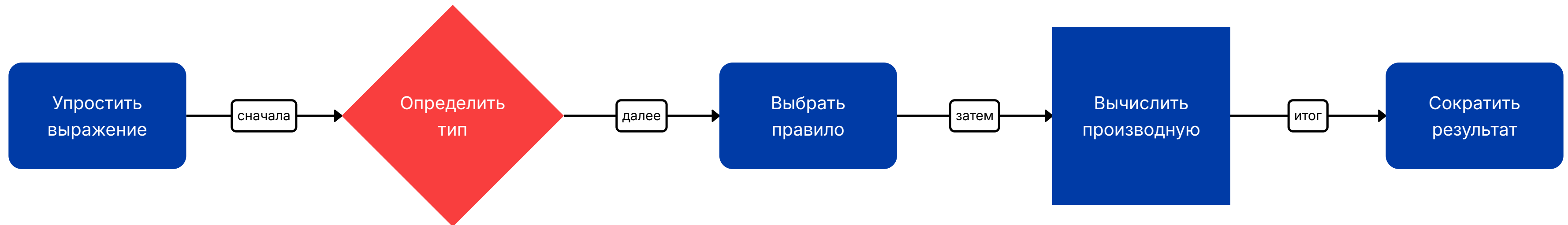
3. Связь с графиком

Геометрически производная связана с наклоном касательной к графику. Чем больше значение производной, тем круче поднимается касательная в данной точке.



Шаги вычисления производной

Последовательность действий помогает не терять шаги в сложных примерах.



Линейность производной

Постоянная

Если функция постоянна, её производная равна нулю. Это удобно при разборе выражений, где рядом с переменной встречаются обычные числа или свободные слагаемые.

Коэффициент

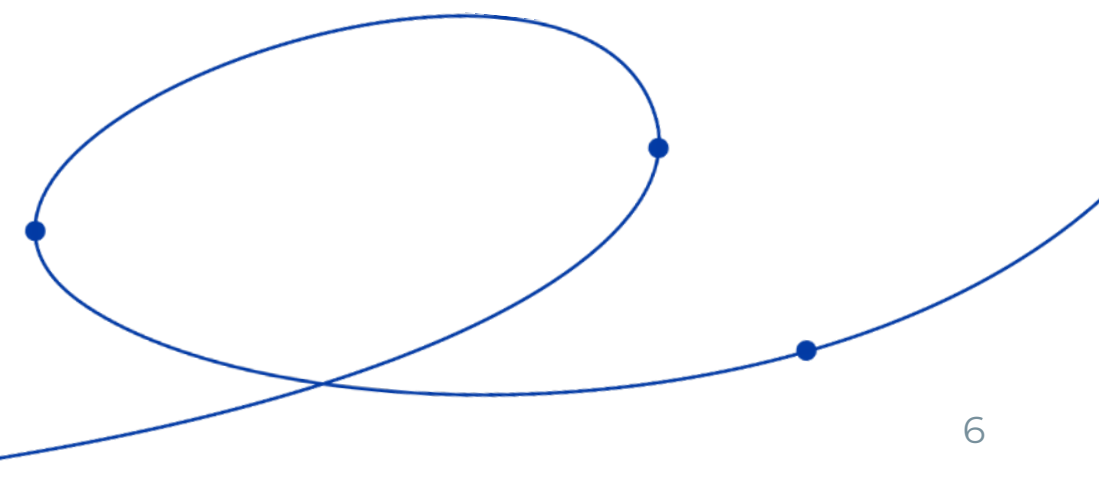
Постоянный множитель можно вынести за знак производной. Поэтому достаточно сначала найти производную части с переменной, а затем умножить результат на коэффициент.

Сумма и разность

Сумма и разность дифференцируются по частям. Каждое слагаемое или вычитаемое рассматривается отдельно, что особенно полезно при работе с длинными многочленами.

Главная идея

Линейность — первый инструмент, который упрощает вычисления. Она позволяет раскладывать большие выражения на более простые фрагменты и не смешивать разные правила без необходимости.



Правило степени



1.

Общий вид

Основное правило степени звучит так: при дифференцировании x^n показатель становится множителем, а сам показатель уменьшается на единицу. Это работает для любых допустимых n .

2.

Простые примеры

Из него сразу следуют знакомые частные случаи: x превращается в 1, константа остаётся с нулевой производной, а квадрат и куб дают $2x$ и $3x^2$.

3.

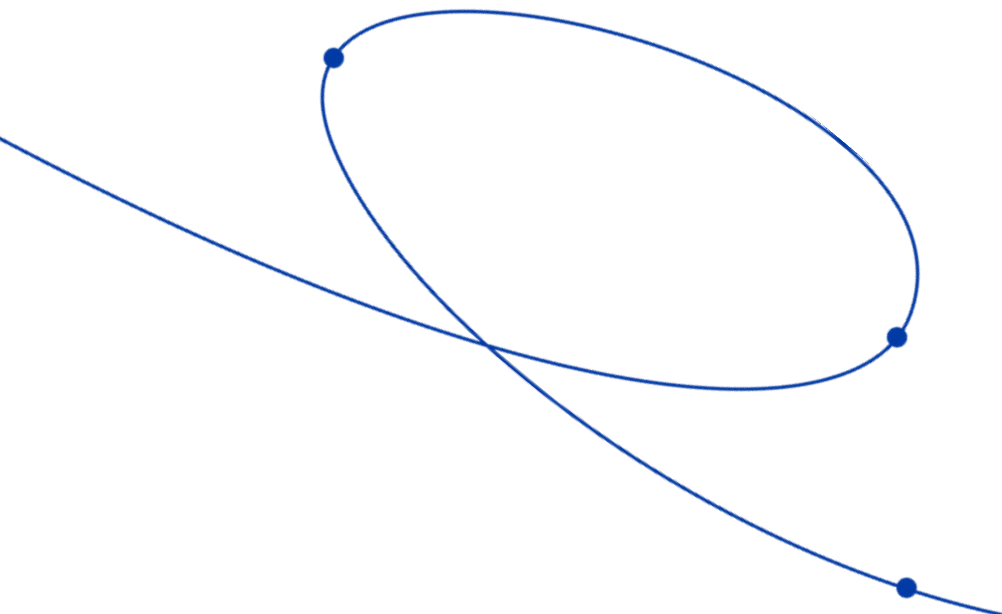
Отрицательные степени

Для отрицательных степеней правило остаётся тем же. Например, x^{-1} , x^{-2} и похожие выражения дифференцируются по общей формуле без дополнительных приёмов.

4.

Дробные показатели

Дробные показатели также подчиняются этому правилу. Именно поэтому корни удобно сначала переписывать как степени, а потом уже находить производную.



Корни и дробные степени

1. Перевод в степень

Корень удобно представлять как степень с дробным показателем. Тогда выражение становится привычным для правила степени, а вычисления выполняются быстрее и без лишних преобразований.

2. Квадратный корень

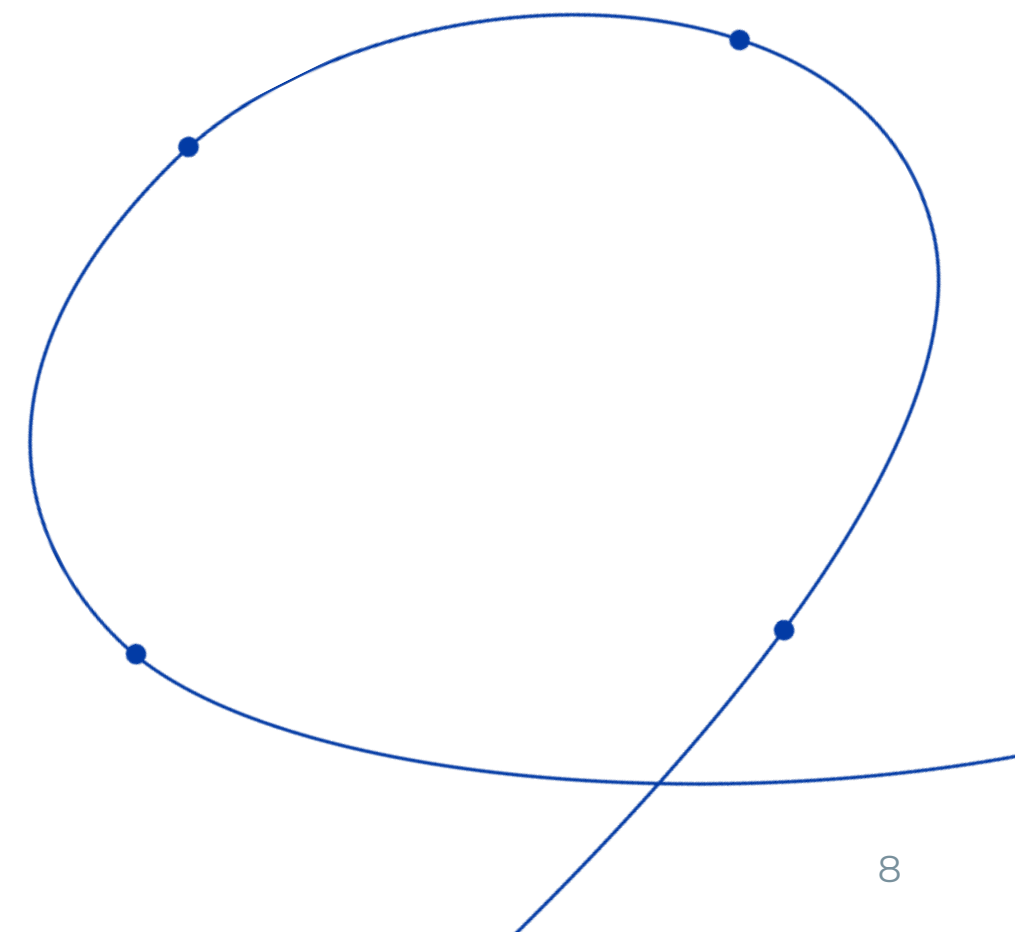
Для квадратного корня получаем производную $1/(2\sqrt{x})$. Такая запись появляется напрямую из формулы $x^{(1/2)}$, поэтому её важно уметь узнавать без колебаний.

3. Корень в знаменателе

Если в знаменателе стоит корень, полезно сначала переписать его как отрицательную степень. Так легче увидеть структуру и не потерять знак при дифференцировании.

4. Обратный корень

Для выражения $1/\sqrt{x}$ производная равна $-1/(2x\sqrt{x})$. Это хороший пример того, как одна и та же идея работает сразу в нескольких формах записи.



Как готовить выражение к дифференцированию



1. Упростить выражение

Сначала полезно раскрыть скобки, вынести общий множитель или переписать дробь в более удобный вид. Чем проще выражение, тем меньше риск ошибиться в правилах.

2. Узнать конструкцию

Затем нужно определить, что именно перед нами: сумма, произведение, частное, степень, корень или композиция функций. От этого зависит выбор формулы.

3. Найти и проверить

После этого применяют нужное правило и только затем собирают результат обратно. Если выражение сложное, несколько правил соединяют в одной задаче.



4

**содержит схема
вычисления производной
от начала до результата.**

Эта базовая формула собирает производную сложного выражения из двух простых частей.

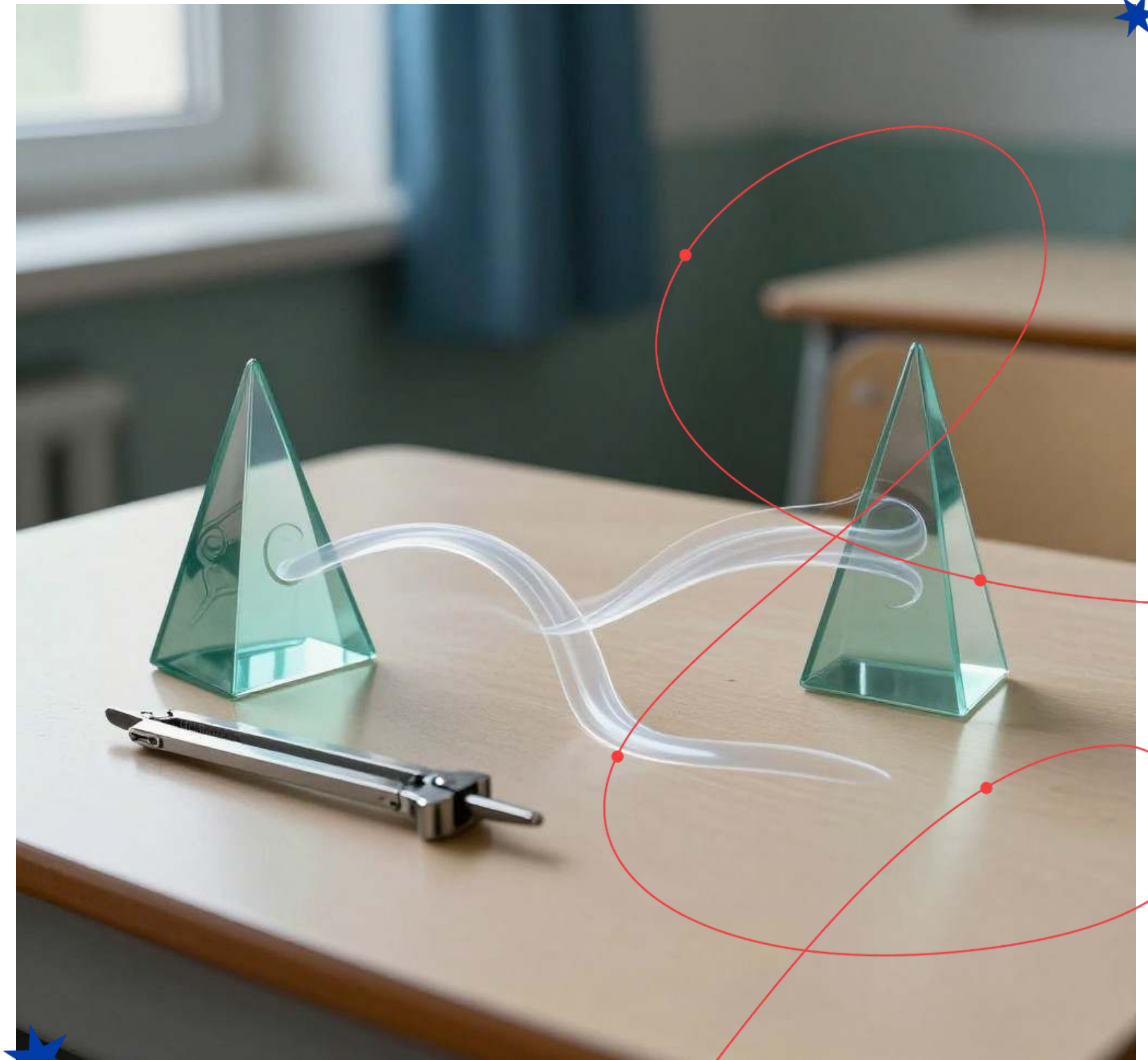
Примеры на произведение

Два слагаемых

При произведении важно не пытаться дифференцировать всё «одним движением». Сначала оставляют первый множитель без изменений и дифференцируют второй, затем меняют роли множителей и складывают результаты.

Пошаговый расчёт

Для $y = x \cdot \sin x$ получаем $y' = \sin x + x \cdot \cos x$. Во втором примере $y = (x^2 + 1)(x - 3)$ сначала берут $2x(x - 3)$, затем прибавляют $x^2 + 1$.



Правило частного

1.

Числитель без ошибок

Сначала записывают числитель как $f'g - fg'$, внимательно сохраняя порядок слагаемых. Именно здесь чаще всего появляется неверный знак, поэтому полезно сверяться с исходной формулой.

2.

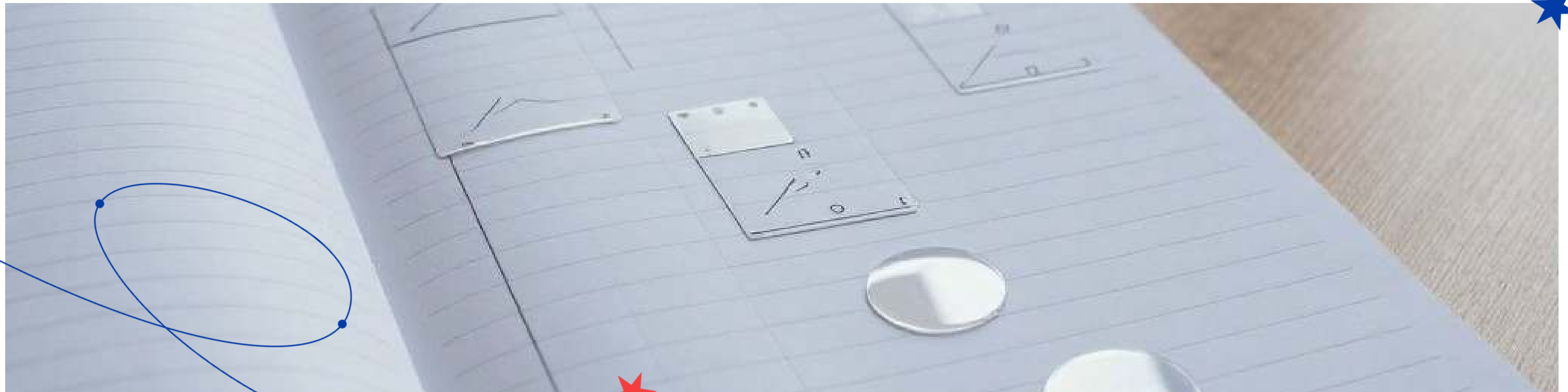
Квадрат знаменателя

Затем знаменатель возводят в квадрат целиком, а не по отдельным частям. Если в исходной дроби знаменатель может обращаться в ноль, область определения проверяют заранее.

3.

Финальная проверка

После применения правила выражение часто можно сократить или разложить на множители. Но упрощение выполняют только после вычисления производной, чтобы не потерять важные члены.



Примеры на частное

Первая дробь

Для $y=x/(x+1)$ производная находится напрямую по правилу частного: $((x+1) \cdot 1 - x \cdot 1)/(x+1)^2$. После сокращения остаётся $1/(x+1)^2$, что удобно для дальнейшего анализа.

Вторая дробь

В выражении $y=(x^2-1)/x$ удобнее сначала применить правило частного, а затем упростить результат. После сокращения получаем $1+1/x^2$, что сразу показывает структуру ответа.



Правило цепочки

1. Внешняя функция

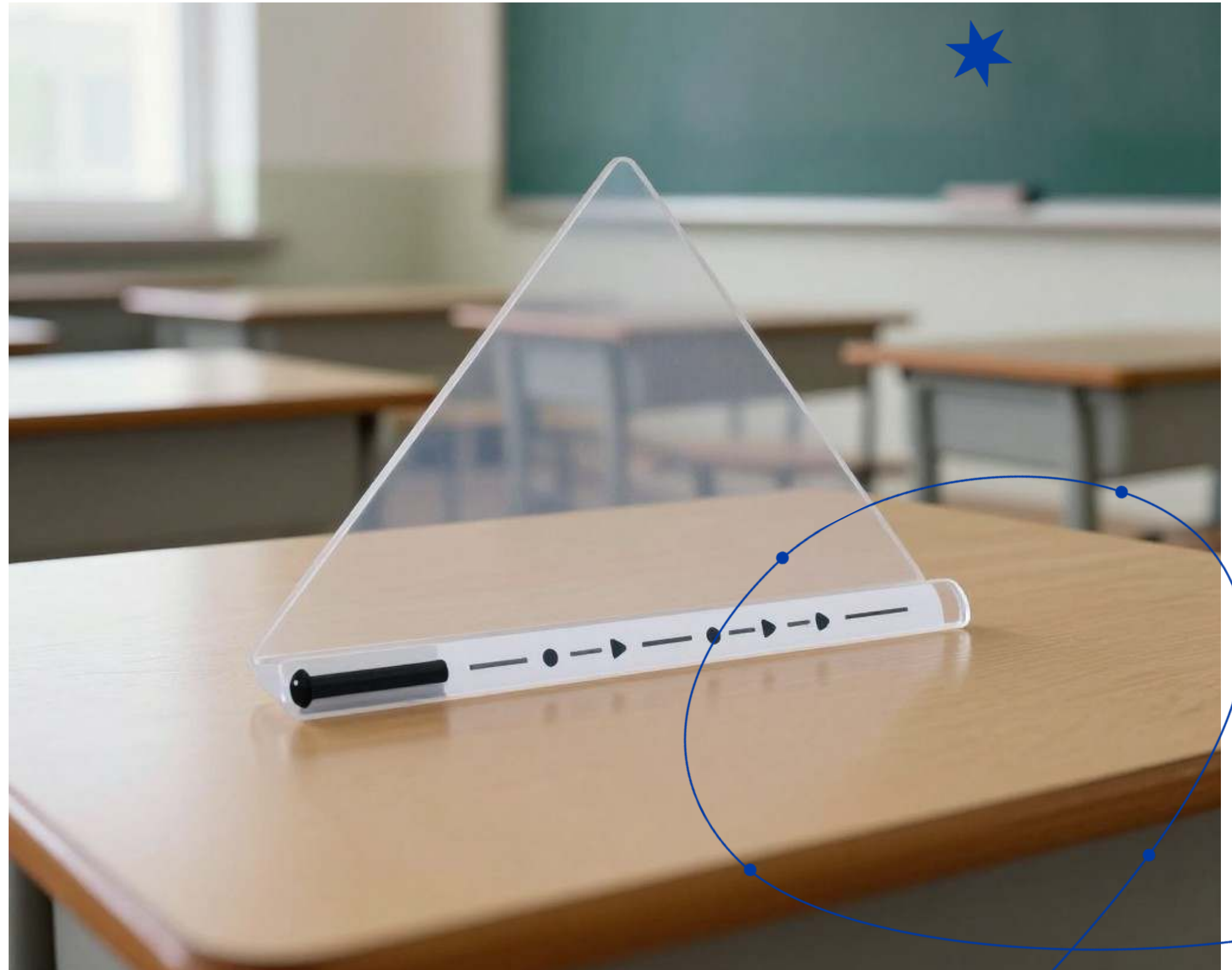
Сначала выделяют внешнюю функцию: здесь это степень пятой степени. Затем дифференцируют её так, будто внутренняя скобка — одна переменная, и сохраняют её в результате.

2. Внутренняя производная

Потом берут производную внутреннего выражения $3x-1$. Она равна 3, поэтому к $5(3x-1)^4$ обязательно добавляется этот множитель, иначе ответ будет неполным.

3. Сборка ответа

Итоговая схема для сложной функции всегда одна: производная внешней части, записанная от внутренней, умножается на производную внутренней части. Для примера получается $5(3x-1)^4 \cdot 3$.



Где искать цепочку



Степени и скобки

Степени от выражения почти всегда требуют цепочки: внутри скобок скрыта отдельная функция, которую нужно дифференцировать дополнительно. Особенно часто это встречается в многочленах и разложенных формулах.



Корни

Корни удобнее сразу переписывать как дробные степени. Тогда видно внутреннее выражение, и производная находится по стандартной схеме без лишних преобразований.



Дробные выражения

В дробях цепочка возникает не только в числителе или знаменателе, но и внутри сложных выражений. Если переменная стоит в более глубокой конструкции, нужен дополнительный множитель.



Аргумент внутри

Тригонометрические функции с аргументом вроде $\sin(2x+7)$ или $\cos(x^2)$ тоже требуют цепочки. Производная базовой функции умножается на производную аргумента.



Основные элементарные функции



Таблица собирает самые нужные производные элементарных функций, которые постоянно встречаются в задачах на правила дифференцирования и служат основой для более сложных вычислений.

Удобно помнить не все формулы подряд, а несколько базовых образцов: показательная, логарифмическая и тригонометрические функции покрывают большинство стандартных примеров.

Функция	Производная
e^{ax}	ae^{ax}
$\sin x$	$\cos x$
$\ln x$	$1/x$
$\operatorname{tg} x$	$1/\cos^2 x$



Стандартные формулы дифференцирования элементарных функций

Логарифмы и их производные



1.

Натуральный логарифм

Для натурального логарифма производная особенно проста: $(\ln x)' = 1/x$. Эта формула часто используется как базовый элемент в более сложных выражениях с внутренней функцией.

2.

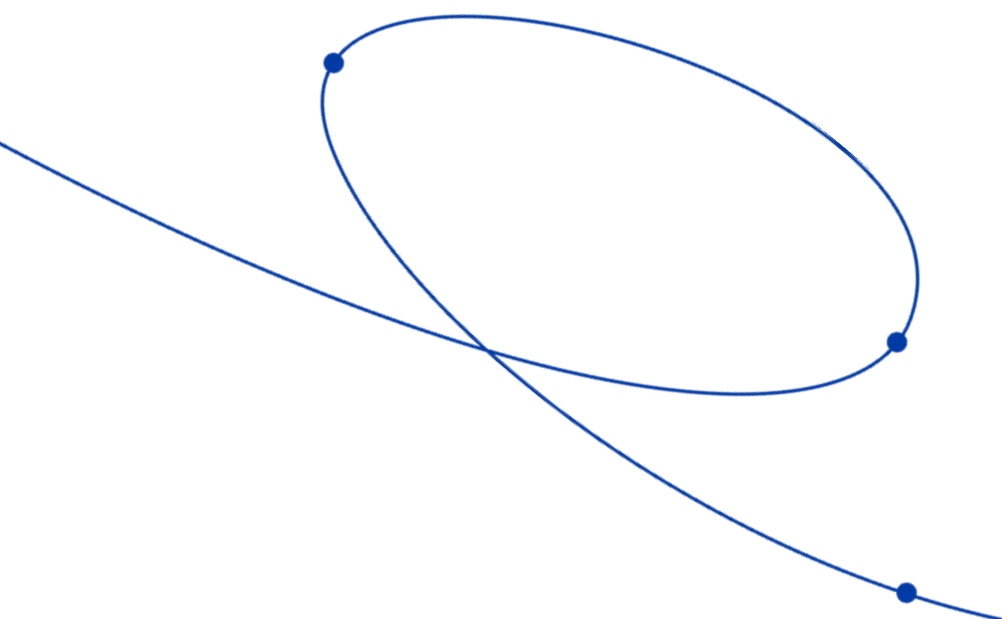
Логарифм по основанию

Для логарифма по основанию a действует формула $(\log_a x)' = 1/(x \ln a)$, где $a > 0$ и $a \neq 1$. Основание влияет только через множитель $\ln a$.

3.

Сложный аргумент

Если внутри логарифма стоит не x , а $f(x)$, подключается цепочка: сначала берут производную внешней функции, затем умножают на $f'(x)/f(x)$.



Комбинация правил в одном примере

1. Распознаём структуру

Сначала распознают произведение: здесь один множитель — многочлен, второй — логарифм. Это подсказывает, что нужно применить правило произведения, а не пытаться свести задачу к одной формуле.

2. Производные множителей

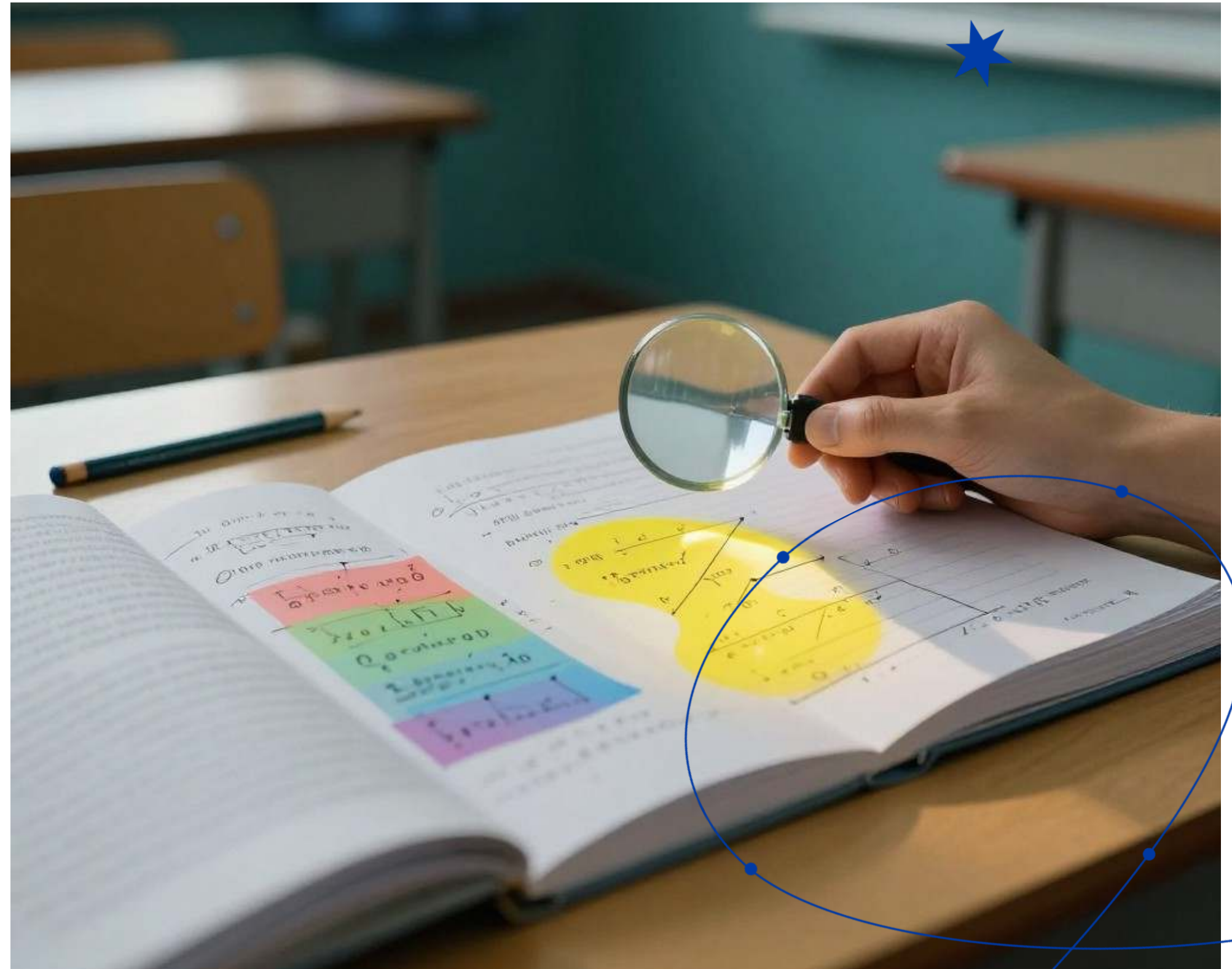
Затем дифференцируют первый множитель: $(x^2+1)'=2x$. Для второго используют цепочку: $(\ln(3x))'=1/x$, потому что производная $3x$ даёт дополнительный множитель.

3. Собираем ответ

После этого складывают два слагаемых по правилу произведения. Получается $2x \cdot \ln(3x) + (x^2+1) \cdot 1/x$, и именно такая запись удобна для дальнейшего упрощения.

4. Контроль хода

В подобных примерах полезно не торопиться: сначала определить тип конструкции, потом выбрать правила и только в конце сокращать. Такой порядок снижает риск арифметических ошибок.



Частые ошибки и проверки

Забывают цепочку

Частая ошибка — забыть множитель из цепочки, особенно когда внутренняя функция выглядит «простой». Проверка через разбиение на внешнюю и внутреннюю части помогает избежать этого промаха.

Сигналы знака

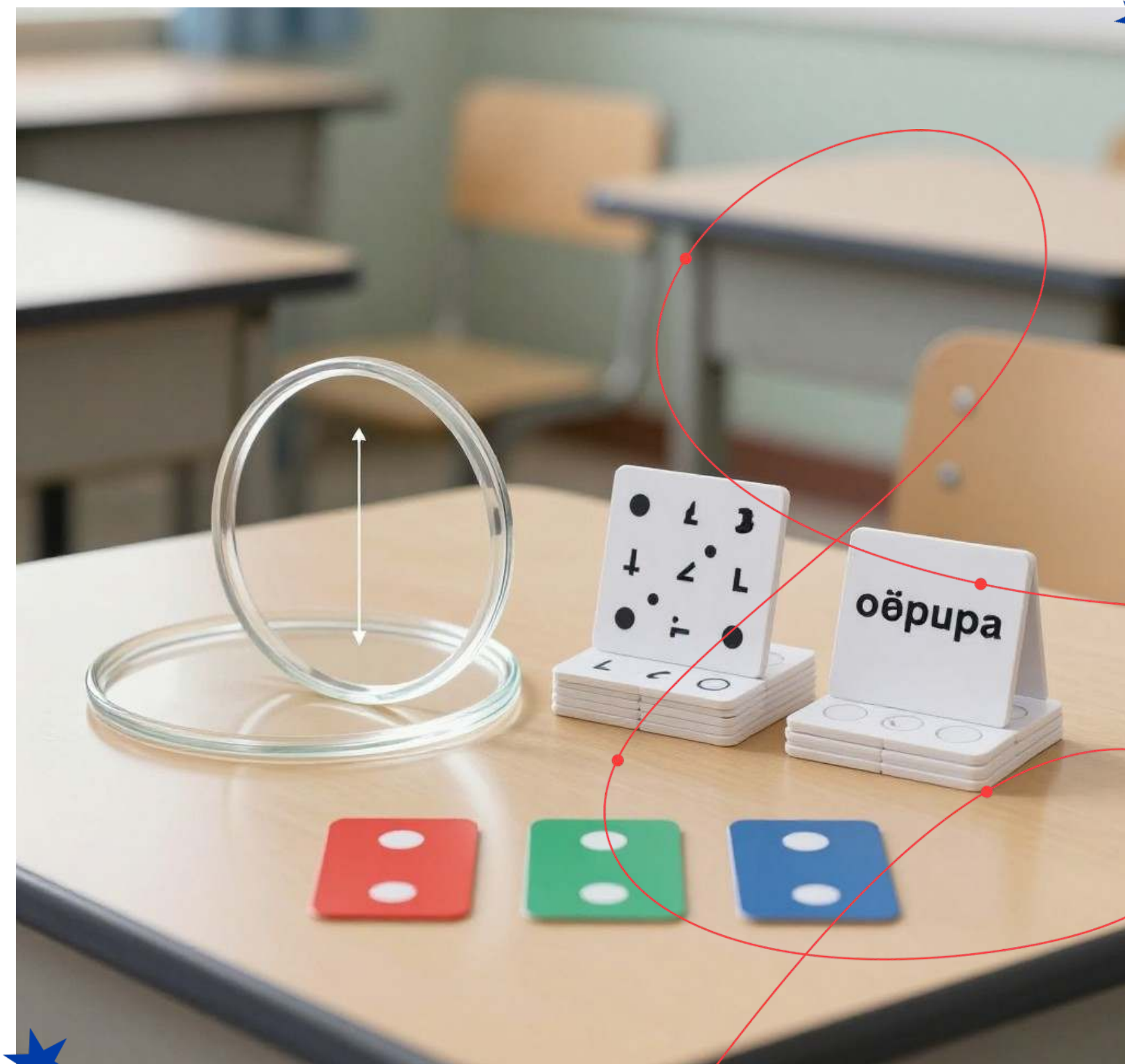
В производной $\cos x$ обязательно стоит минус, а в $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ важно не перепутать квадрат тригонометрической функции в знаменателе. Эти детали лучше сразу сверять.

Ошибки в частном

При частном опасно поменять местами слагаемые в числителе или забыть квадрат знаменателя. Полезно каждый раз проговаривать формулу вслух перед записью ответа.

Алгоритм проверки

Надёжная самопроверка строится по трём шагам: выделить внешнюю функцию, найти внутреннюю, проверить область определения. Если все три пункта ясны, вероятность ошибки заметно ниже.



Итоги и домашняя работа

Главный вывод прост: сначала упростите выражение, затем выберите правило и проверьте область определения. Если уверенно владеть базовыми формулами и цепочкой, большинство задач решается без лишних шагов. Домашняя работа: $x^3(2x-1)$, $(x^2+1)/(x-3)$, $\ln(5x)$.

