

Тригонометрические тождества: связь углов и сторон в геометрии

Узнаем, как синус, косинус, тангенс и котангенс связаны формулами.



Где тригонометрия помогает в задачах

Эти тождества помогают находить неизвестные углы и стороны, проверять ответы и упрощать выражения в задачах на треугольники и окружность, используя простые, но важные связи между функциями угла и длинами сторон треугольника.

Синус, косинус, тангенс и котангенс в прямоугольном треугольнике

01

Синус

Синус острого угла показывает, насколько велик противолежащий катет по сравнению с гипотенузой. Эта дробь удобно описывает положение угла в прямоугольном треугольнике.

02

Косинус

Косинус связывает прилежащий катет с гипотенузой. Если известны две стороны треугольника, именно эта величина часто помогает быстро найти нужный угол или длину.

03

Тангенс

Тангенс равен отношению противолежащего катета к прилежащему. Он особенно удобен, когда известны оба катета, а гипотенуза в вычислениях не нужна.

04

Котангенс

Котангенс показывает отношение прилежащего катета к противолежащему. Он является «обратной» по смыслу величиной к тангенсу и тоже выражает связь сторон треугольника.

Едини́чная окру́жность и координаты точки

❖ Радиус 1

Едини́чная окру́жность имеет радиус, равный одному. Это делает вычисления особенно удобными: длины на ней напрямую связываются с координатами точки и значениями тригонометрических функций.

❖ Координаты точки

Если точка лежит на окружности и соответствует углу, её абсцисса равна косинусу, а ордината — синусу этого угла. Так геометрия переходит в язык координат.

❖ Уравнение окружности

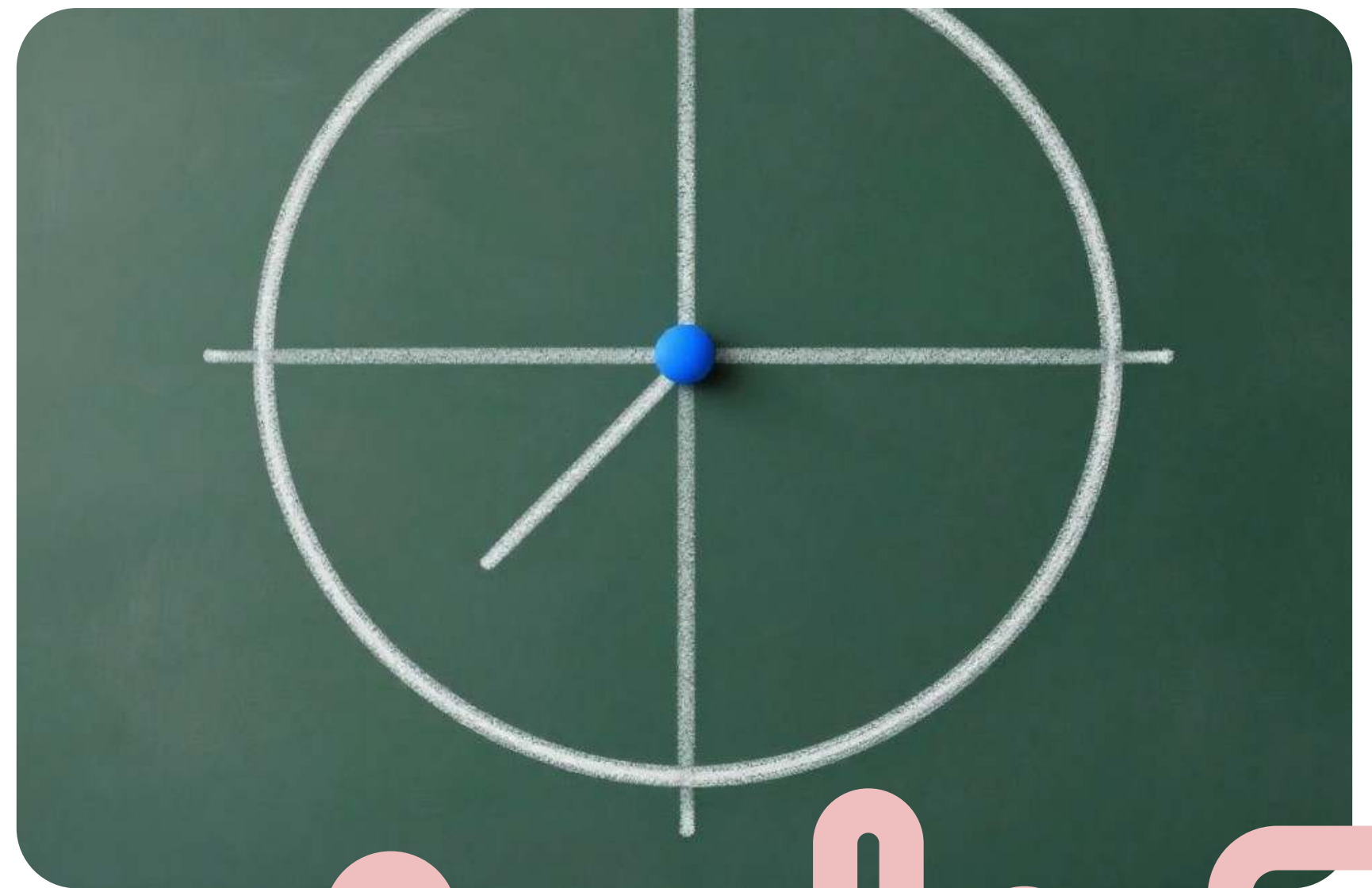
Для любой точки на окружности выполняется соотношение $x^2 + y^2 = 1$. После подстановки $x = \cos \alpha$ и $y = \sin \alpha$ получается основное тригонометрическое тождество.

❖ Источник тождества

Именно из связи координат с окружностью выводится равенство $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Оно показывает, что синус и косинус не выбираются независимо.

❖ Что видно на рисунке

На схеме удобно отметить оси, радиус и точку на окружности. Такая иллюстрация помогает понять, почему значения синуса и косинуса связаны между собой.



Основные тригонометрические тождества

В таблице собраны самые нужные формулы темы, их смысл и типичное применение в школьных задачах.

Все формулы опираются на одно основное равенство и позволяют заменять одну функцию другой без потери смысла.

Школьный курс математики, тема «Тригонометрические тождества»

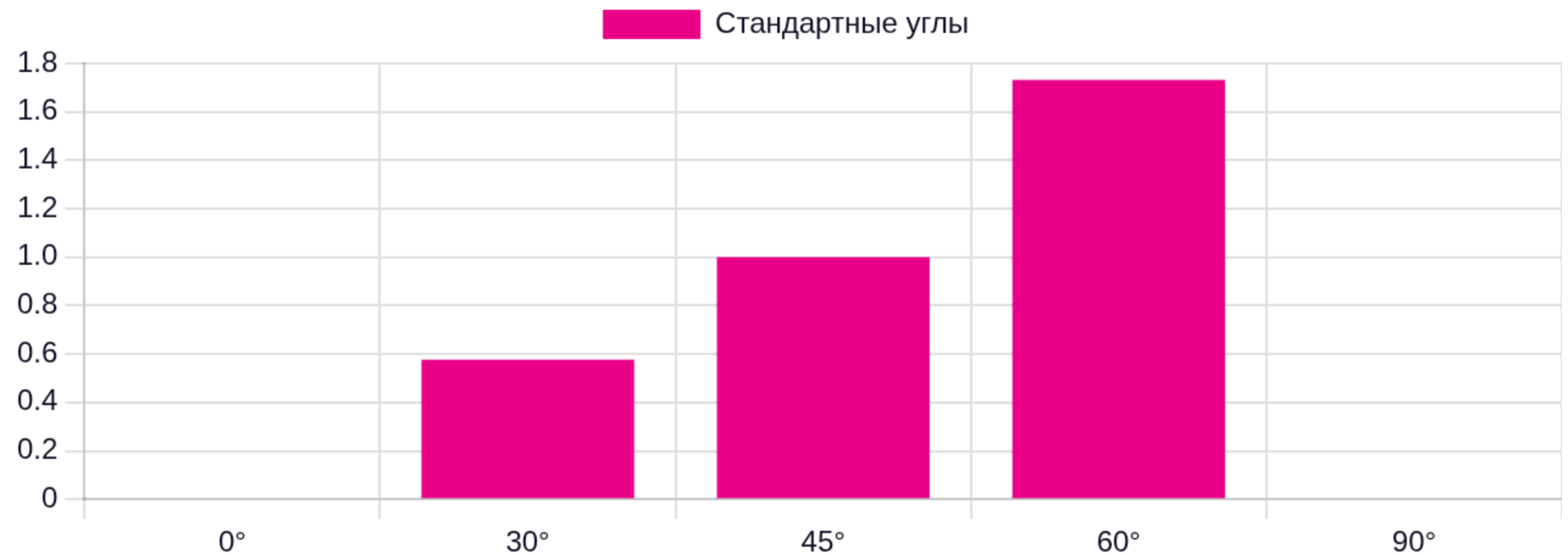
Формула	Смысл	Применение
$\sin^2x + \cos^2x = 1$	Связь функций	Нахождение неизвестной
$\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$	Тангенс через $\sin$, $\cos$	Преобразование дробей
$\operatorname{ctg} x = \cos x / \sin x$	Котангенс через $\sin$, $\cos$	Преобразование дробей
$1 + \operatorname{tg}^2x = 1 / \cos^2x$	Связь с тангенсом	Упрощение выражений
$1 + \operatorname{ctg}^2x = 1 / \sin^2x$	Связь с котангенсом	Упрощение выражений

Значения $\sin$, $\cos$ и tg для стандартных углов

На таких углах удобно запоминать не только числа, но и порядок их изменения: значения растут или убывают по определённым правилам.

Стандартные углы помогают быстро проверять вычисления и видеть закономерности в поведении тригонометрических функций.

Стандартные значения тригонометрических функций из школьного курса математики



1

задаёт общую связь между квадратами синуса и косинуса для любого угла.

Это равенство позволяет по известной функции сразу найти вторую и проверить, не допущена ли ошибка в вычислениях.

Основное тригонометрическое тождество из школьного курса математики

Формулы с тангенсом и котангенсом

01

Тангенс через основные функции

Формула $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$ показывает, что тангенс можно выразить через две основные функции. Это удобно при преобразовании дробей и упрощении выражений.

02

Котангенс через основные функции

Формула $\operatorname{ctg} x = \cos x / \sin x$ действует аналогично. Она помогает заменять котангенс на более простую запись, если в задаче уже известны синус и косинус.

03

Связанные тождества

Из основного равенства выводятся формулы $1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 / \cos^2 x$ и $1 + \operatorname{ctg}^2 x = 1 / \sin^2 x$. Они часто используются при преобразованиях в одну строку.

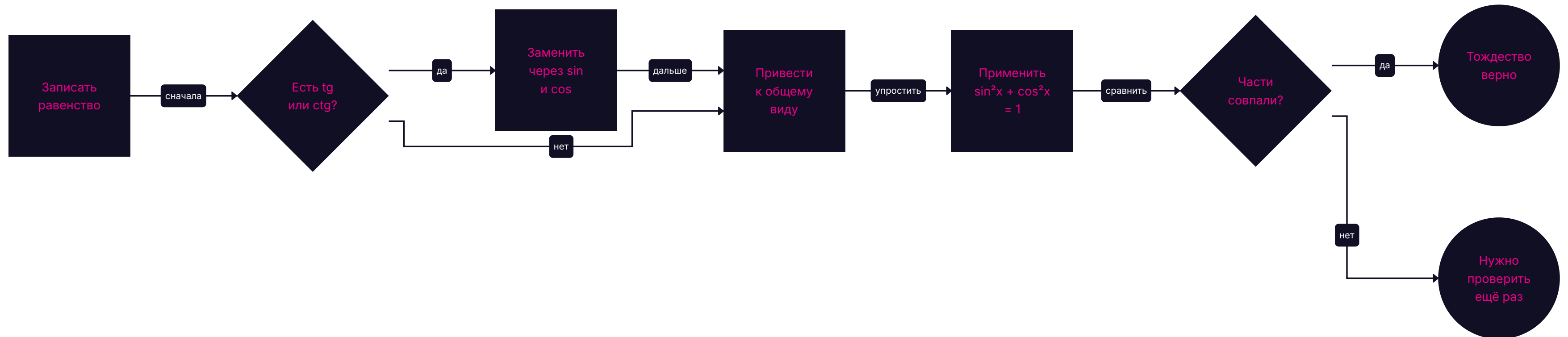
04

Условия применимости

Для тангенса нужно, чтобы $\cos x$ не был равен нулю, а для котангенса — чтобы $\sin x$ не обращался в ноль. Иначе деление невозможно.

Проверяем тождество по шагам

Последовательность действий при преобразовании тригонометрических выражений



Формулы для отрицательного аргумента

Синус

Синус меняет знак при переходе к отрицательному аргументу. Это значит, что график функции симметричен относительно начала координат и удобно отражает значения по вертикали.

Косинус

Косинус при отрицательном аргументе остаётся тем же. Такая чётность связана с симметрией графика относительно оси ординат и помогает быстро упрощать выражения.

Тангенс

Тангенс тоже меняет знак при смене аргумента на противоположный. Это свойство особенно полезно, когда нужно преобразовать выражение перед вычислением или сравнением.

Котангенс

Котангенс ведёт себя так же, как тангенс: знак меняется на противоположный. Запоминание этих свойств сокращает количество лишних действий в решении.

Четверти окружности и знаки функций

Первая четверть

Здесь координаты точки положительны, поэтому синус, косинус, тангенс и котангенс принимают положительные значения. Это самый удобный участок для первых проверок и вычислений по окружности.

Вторая четверть

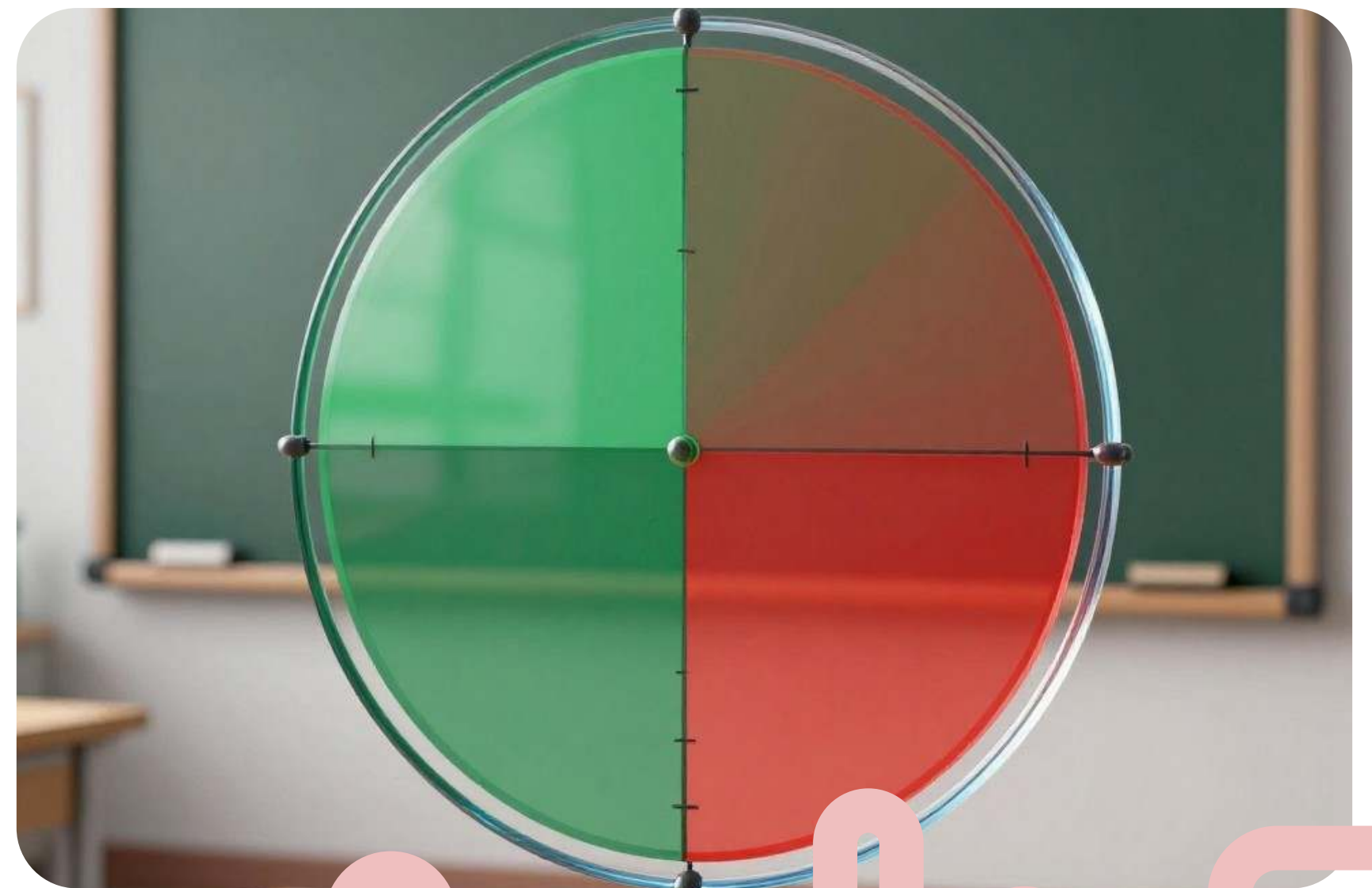
Во второй четверти ордината положительна, а абсцисса отрицательна. Поэтому положительным остаётся только синус, а косинус, тангенс и котангенс имеют отрицательный знак.

Третья четверть

В третьей четверти обе координаты точки отрицательны. Из-за этого синус и косинус отрицательны, а отношения одинаковых по знаку величин делают тангенс и котангенс положительными.

Четвёртая четверть

В четвёртой четверти абсцисса положительна, а ордината отрицательна. Поэтому положителен косинус, а синус, тангенс и котангенс получают отрицательные значения.

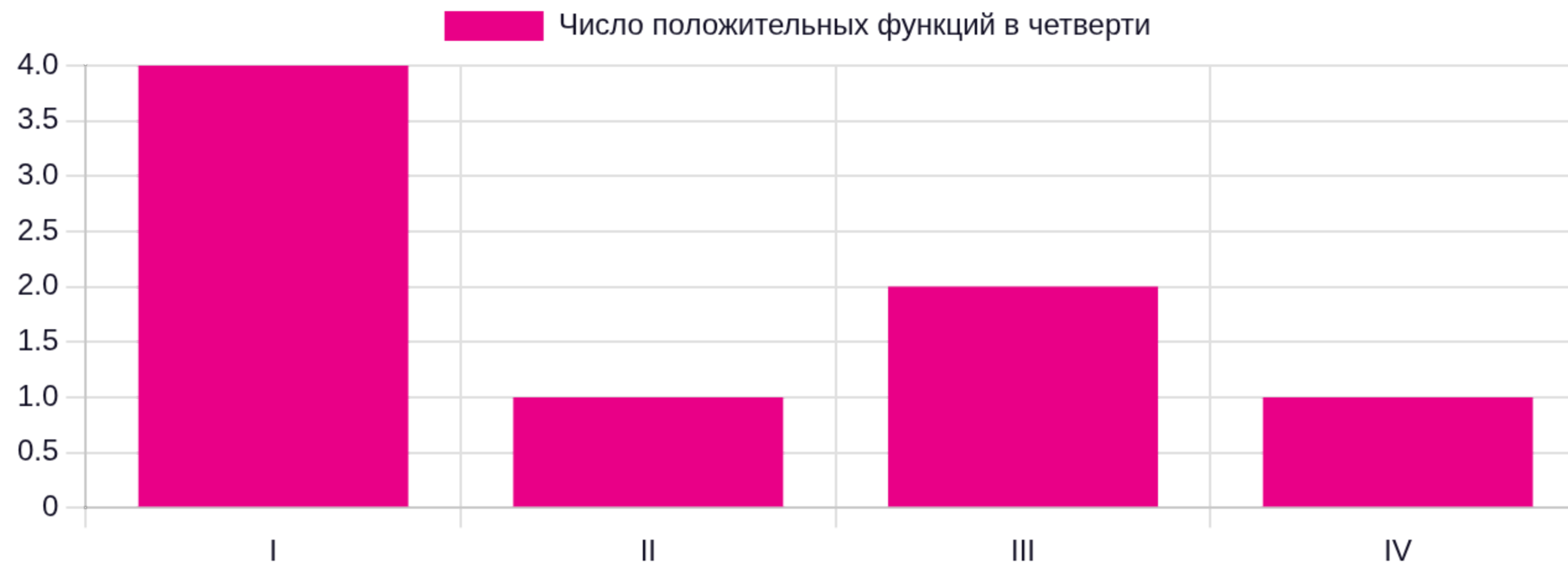


Знаки тригонометрических функций по четвертям

Диаграмма показывает, как меняется количество положительных функций в разных четвертях. Это помогает быстро восстановить знак нужной величины без долгого перебора формул.

Максимум положительных функций приходится на I четверть, минимум — на II и IV. Значит, знак определяется прежде всего положением точки на окружности.

Сводка правил знаков тригонометрических функций по четвертям, учебный материал по теме «Тригонометрические тождества».



Три записи одной и той же связи

Формула	Смысл	Когда удобно
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	ОСНОВНАЯ СВЯЗЬ	всегда
$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$	найти $\sin$	известен $\cos$
$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$	найти $\cos$	известен $\sin$

В таблице показано, что одно тождество можно записать в разных формах. Выбор записи зависит от того, что уже известно в задаче.

Все записи равносильны и позволяют выразить одну функцию через другую. Это делает формулу гибким инструментом для решения задач.

Приведённые преобразования основного тригонометрического тождества.

Типичные приёмы преобразования выражений



Замена через $\sin$ и $\cos$

Тангенс и котангенс удобно сразу переписывать через синус и косинус. Так легче увидеть общие множители, привести дроби к одному знаменателю и использовать основное тождество.



Подстановка тождества

Если в выражении встречаются $\sin^2 x$ или $\cos^2 x$, их заменяют на $1 - \cos^2 x$ или $1 - \sin^2 x$. Это помогает сократить запись и вывести нужную формулу.



Общий знаменатель

После замены дроби часто приводят к общему знаменателю. Такой шаг позволяет складывать, вычитать и сравнивать выражения без потери точности и без лишних вычислений.



Проверка условий

Перед сокращением нужно убедиться, что знаменатель не равен нулю. Иначе формула окажется применена неверно, а ответ может стать недопустимым даже при правильных преобразованиях.

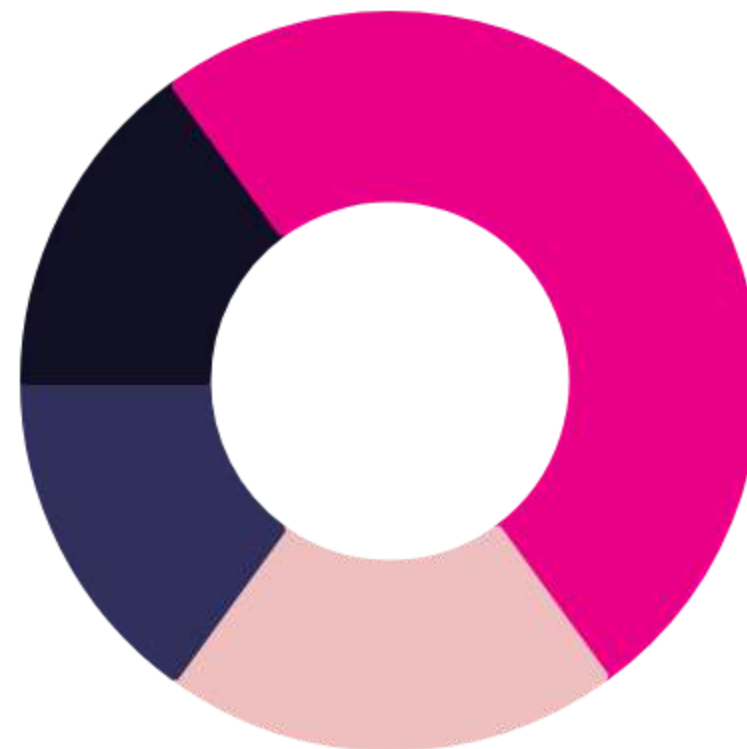
Какие формулы чаще всего встречаются в задачах

Диаграмма отражает учебную частоту, а не строгую статистику. Она показывает, какие формулы стоит повторить в первую очередь перед самостоятельной работой.

Основное тождество занимает наибольшую долю, потому что служит базой для остальных преобразований. Остальные правила дополняют его и ускоряют вычисления.

Учебная подборка типовых примеров по теме; распределение условное, для наглядности.

Основное тождество tg и ctg через $\sin/\cos$ $1 + \text{tg}^2$ и $1 + \text{ctg}^2$
Знаки по четвертям Отрицательный аргумент



Пример: как найти неизвестную функцию

01

Известное значение

Дано: $\sin x = 3/5$, причём угол острый. Это важно, потому что в первой четверти синус и косинус положительны, а значит ответ можно выбрать без сомнений по знаку.

02

Находим косинус

Используем основное тождество: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Подставляем $3/5$ вместо синуса и получаем $\cos^2 x = 1 - 9/25 = 16/25$, значит $\cos x = 4/5$.

03

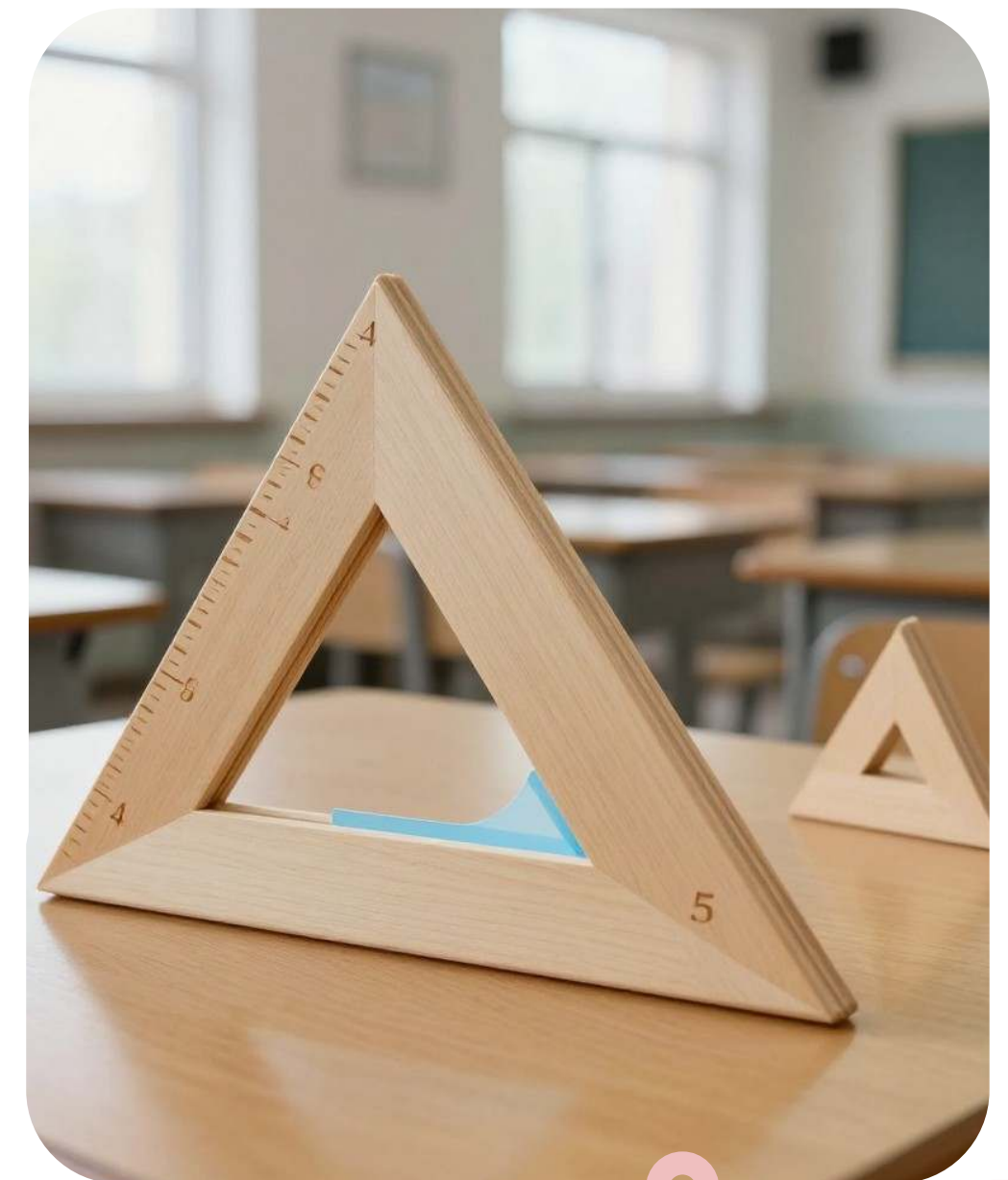
Вычисляем тангенс

Теперь применяем формулу $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$. Подстановка даёт $\operatorname{tg} x = (3/5) / (4/5) = 3/4$. Так одна найденная функция помогает определить следующую.

04

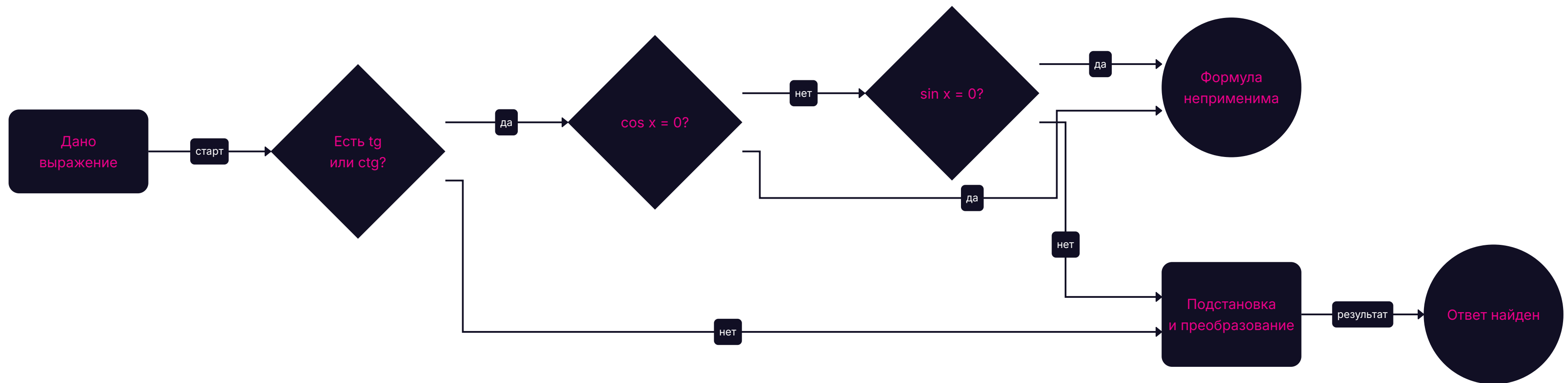
Проверяем ответ

Полученные значения удобно представить на прямоугольном треугольнике со сторонами 3, 4 и 5. Эта модель показывает, почему числа согласуются с формулами и знаком угла.



Проверка допустимости формулы перед вычислением

Последовательность действий показывает, когда формулу можно применять, а когда нужно сначала проверить область определения.



Частые ошибки при изучении тождеств

Путаница в понятиях

Тождество не доказывают как обычное уравнение: оно верно при всех допустимых значениях переменной. Если забыть это различие, можно неправильно оценить результат преобразования.

Неверные знаки

При переходе между четвертями легко потерять знак синуса, косинуса, тангенса или котангенса. Чтобы этого избежать, нужно каждый раз учитывать положение точки на окружности.

Опасное сокращение

Сокращать дробь можно только тогда, когда ясно, что общий множитель не обращается в ноль. Иначе можно незаметно потерять допустимые решения или получить неверный вывод.

Игнорирование области

Формулы для тангенса и котангенса работают не всегда. Если забыть проверить, равны ли нулю $\cos x$ или $\sin x$, вычисление может привести к делению на ноль.

Опорные формулы для повторения

Эта таблица собрана как краткая памятка. В ней есть базовые записи, из которых строятся почти все школьные преобразования и проверки.

Все пять формул связаны между собой и часто используются вместе. Если запомнить их как единую систему, решения становятся короче и понятнее.

Основные формулы темы «Тригонометрические тождества» из школьного курса.

Формула	Смысл	Зачем нужна
$\sin^2x + \cos^2x = 1$	основа связи	находит вторую функцию
$\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$	тангенс через функции	упрощает дроби
$\operatorname{ctg} x = \cos x / \sin x$	котангенс через функции	упрощает дроби
$1 + \operatorname{tg}^2x = 1 / \cos^2x$	связь с косинусом	для преобразований
$1 + \operatorname{ctg}^2x = 1 / \sin^2x$	связь с синусом	для преобразований

Тригонометрия становится понятной, когда формулы работают вместе

Тригонометрические тождества объединяют
треугольник, окружность и алгебру в одну систему.
Если помнить основную формулу, знаки по четвертям
и условия применения, задачи решаются быстрее
и аккуратнее.