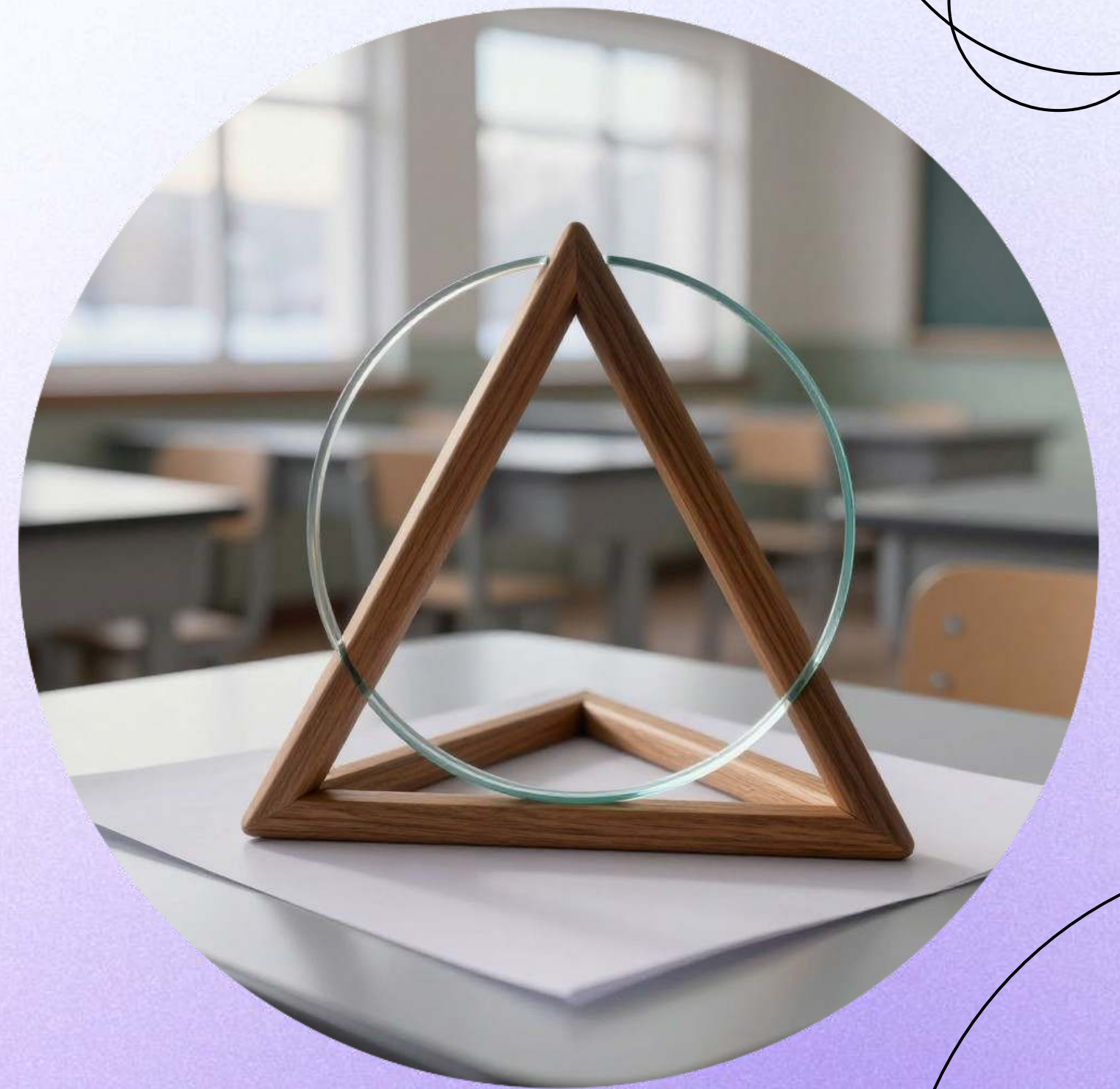


Формула Эйлера и расстояние между центрами окружностей треугольника

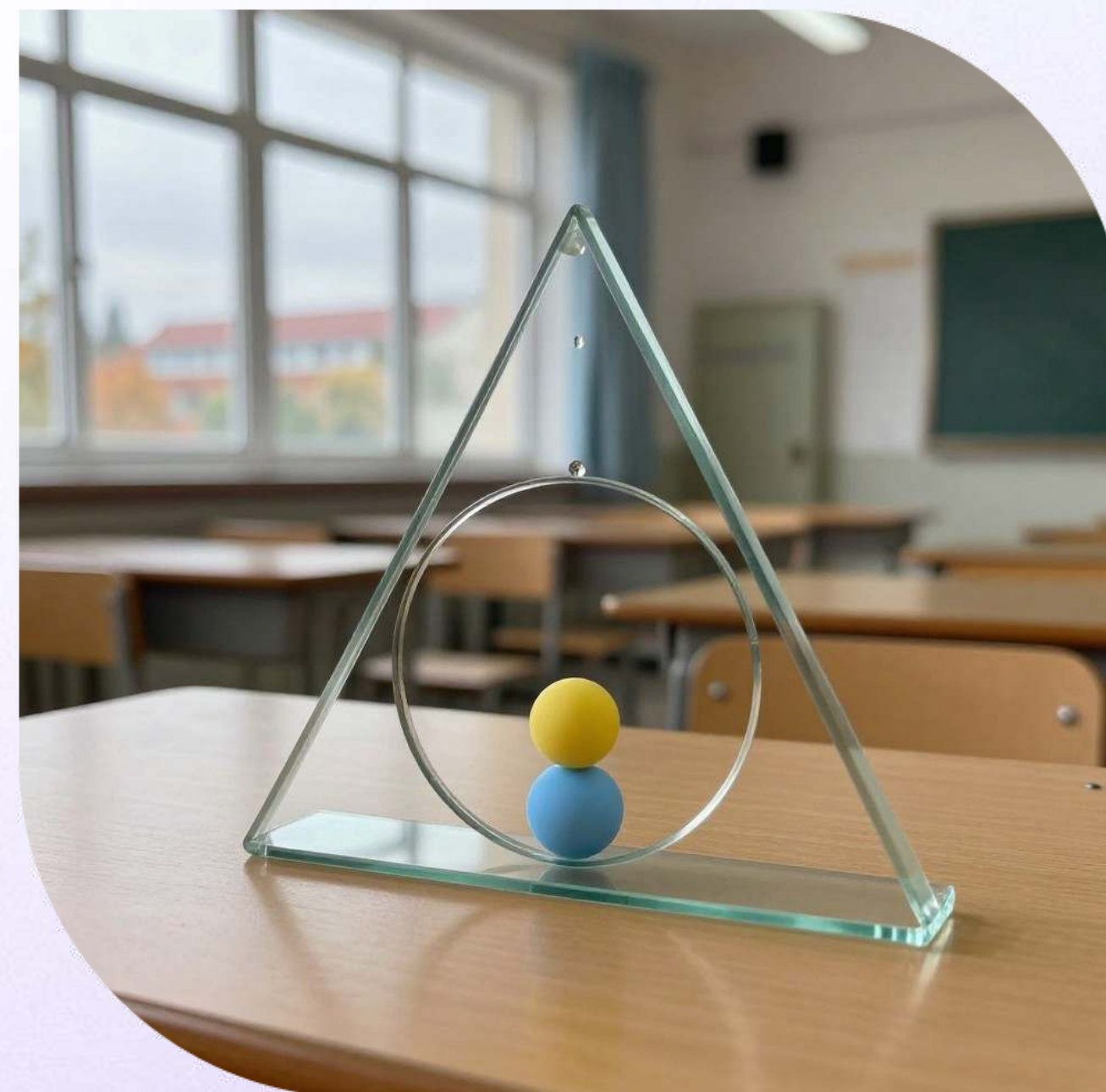
Связь двух центров треугольника через
радиусы окружностей





Зачем изучать эту формулу в 9 классе

Формула Эйлера показывает, как описанная и вписанная окружности связаны между собой. Она соединяет радиусы R и r с расстоянием между центрами O и I без лишних измерений.



Центр описанной окружности треугольника

- **Равноудалённость от вершин**

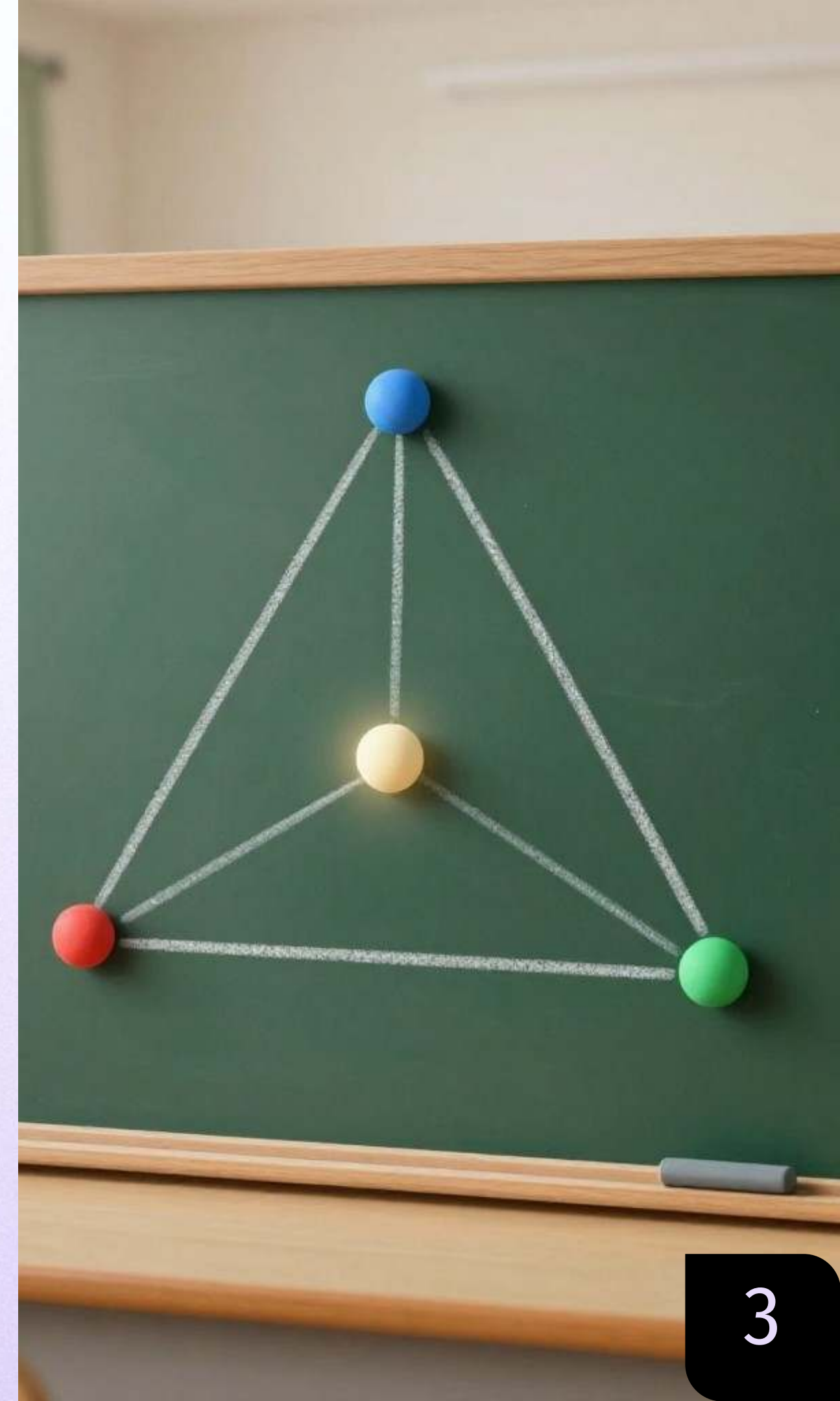
Точка O находится на одинаковом расстоянии от всех трёх вершин треугольника, поэтому именно она служит центром описанной окружности и определяет её радиус R .

- **Пересечение серединных перпендикуляров**

Центр описанной окружности лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Это геометрическое свойство помогает построить его точно на чертеже.

- **Связь с радиусом R**

Расстояние от точки O до любой вершины равно радиусу описанной окружности. Значит, любое такое расстояние можно обозначить одной и той же буквой R .



Центр вписанной окружности треугольника

1

Общее расстояние до сторон

Точка I расположена так, что одинаково удалена от всех сторон треугольника. Именно поэтому она является центром вписанной окружности и связана с радиусом r .

2

Пересечение биссектрис

Чтобы найти центр вписанной окружности, проводят биссектрисы углов треугольника. Их пересечение и даёт точку I , удобную для построения на чертеже.

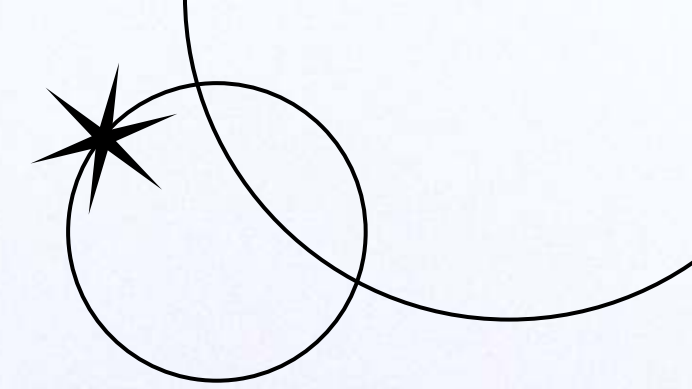
3

Связь с радиусом r

Расстояние от центра I до любой стороны треугольника равно радиусу вписанной окружности. Это расстояние одинаково для всех сторон и обозначается буквой r .

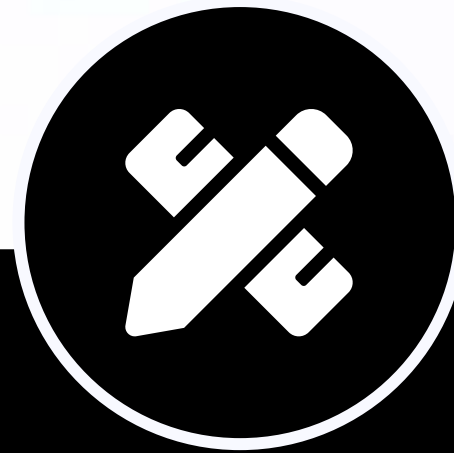


Что означает отрезок OI



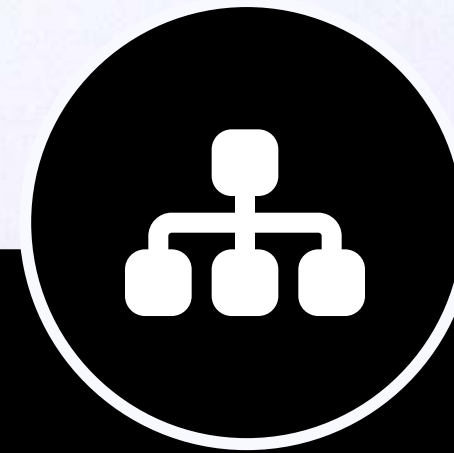
Расстояние между центрами

Отрезок OI показывает, насколько далеко друг от друга расположены центр описанной окружности и центр вписанной окружности. Это одна из самых важных связей в задаче.



Можно найти по формуле

Если известны радиусы R и r , длину OI удобно вычислить по формуле Эйлера. Тогда не нужно измерять отрезок по рисунку и рисковать ошибкой.

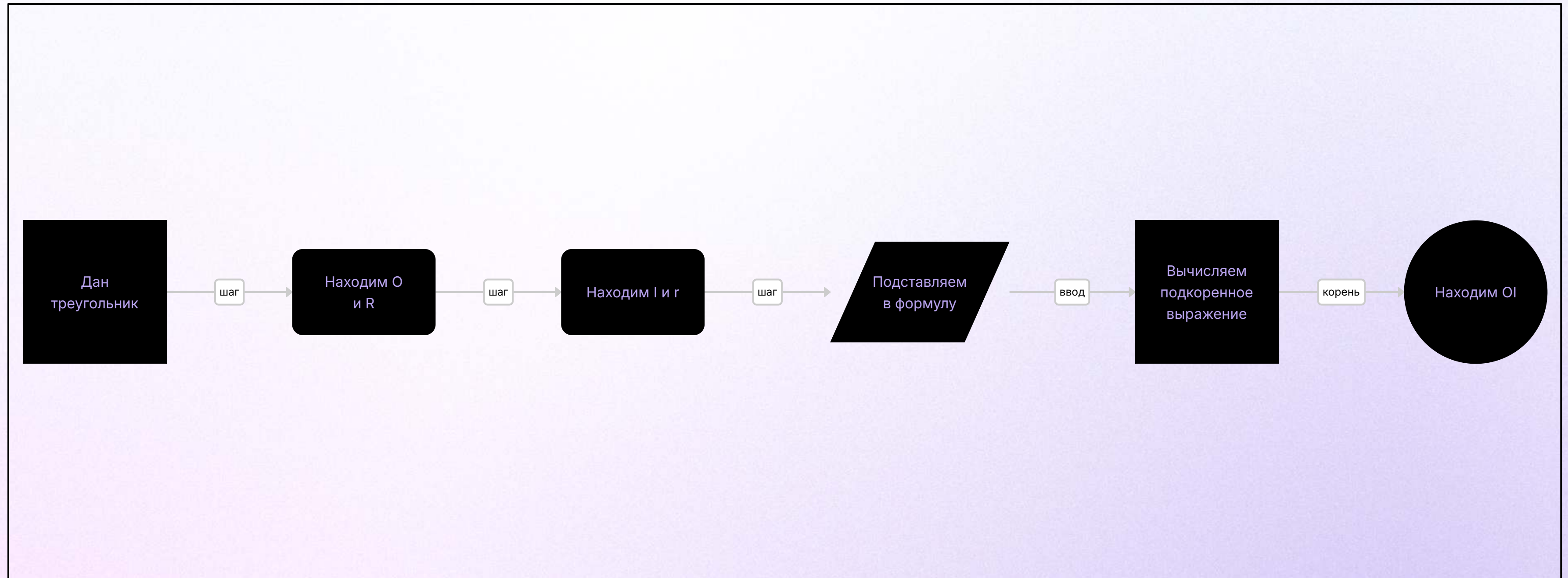


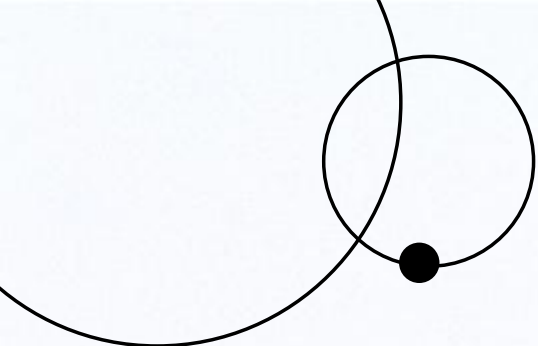
Связь свойств треугольника

Отрезок OI объединяет сведения о вершинах, сторонах и окружностях треугольника. Он помогает увидеть, как разные элементы одной фигуры связаны между собой.

Как находят расстояние между центрами

Последовательность действий при решении задачи по формуле Эйлера





$2r$

показывает, что
радиус вписанной
окружности входит
в формулу
в удвоенном виде.

Формула связывает
расстояние между
центрами только
с радиусами R и r , поэтому
достаточно знать два числа,
чтобы найти OI .

✦ Формула Эйлера для треугольника

Когда формула даёт нулевое расстояние

1

Условие равенства

Если в формуле выполняется равенство $R = 2r$, то подкоренное выражение становится нулём, и расстояние OI также равно нулю.

2

Совпадение центров

При $OI = 0$ центры описанной и вписанной окружностей совпадают. Это означает, что обе важные точки треугольника находятся в одном месте.

3

Особый треугольник

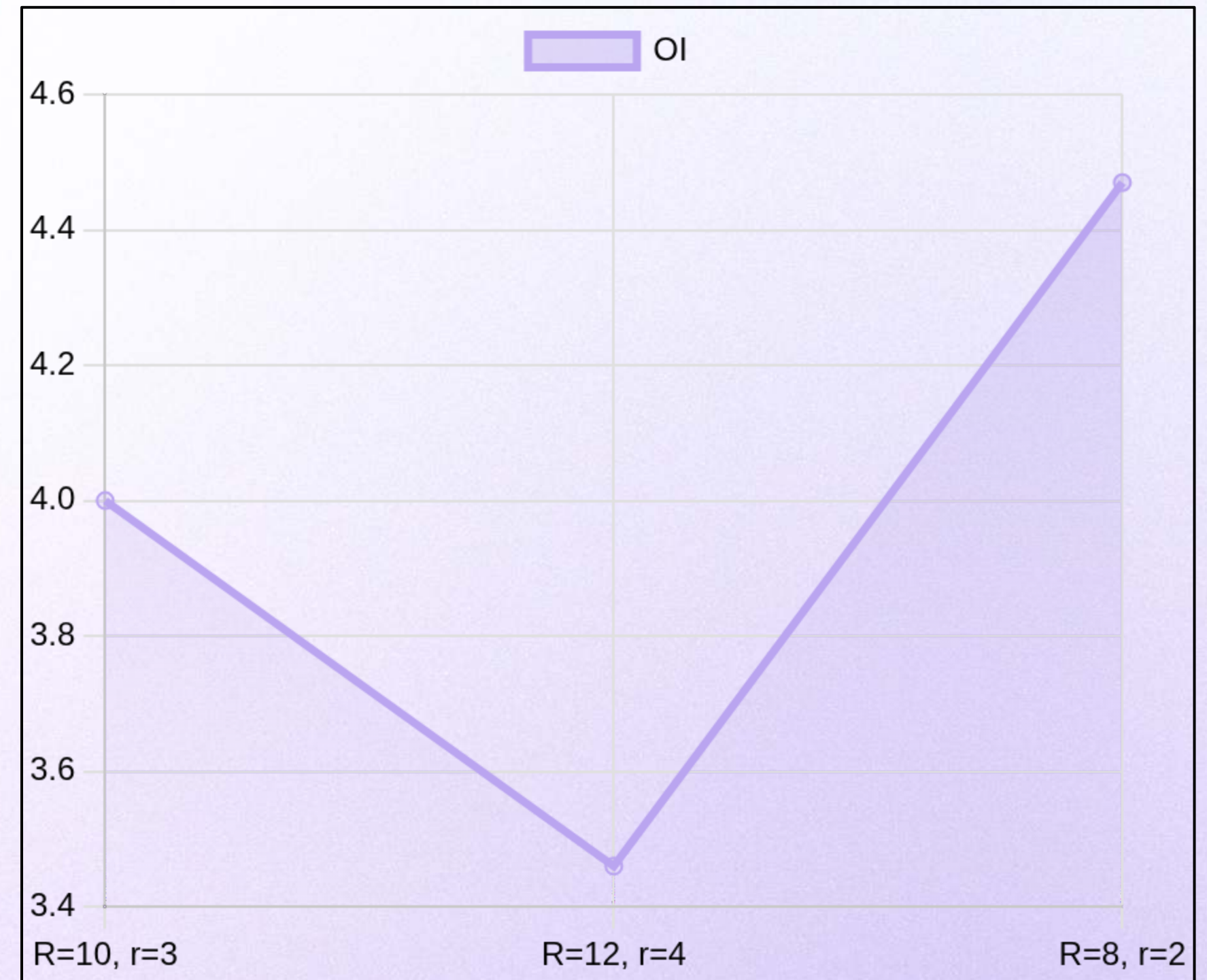
Такой случай возможен только у равностороннего треугольника. В остальных случаях центры не совпадают, поэтому расстояние между ними остаётся положительным.



Как меняется расстояние OI при разных радиусах

Все значения рассчитаны по одной формуле, поэтому их удобно сравнивать на одном графике. Видно влияние радиуса вписанной окружности.

При большем r расстояние OI обычно уменьшается, если R остаётся тем же. Чем меньше r , тем больше значение под корнем.



★ Расчёты по формуле $OI^2 = R(R - 2r)$, учебные примеры

Пример вычисления по формуле

1

Дано

Берём значения $R = 13$ см и $r = 4$ см. Теперь можно подставить их в формулу Эйлера и начать вычисления.

2

Находим скобки

Сначала вычисляем выражение в скобках: $13 - 8 = 5$. Это самый первый обязательный шаг перед умножением.

3

Выполняем умножение

Затем умножаем: $13 \cdot 5 = 65$. Получаем значение под квадратным корнем, которое ещё нужно преобразовать.

4

Получаем ответ

Извлекаем корень: $OI = \sqrt{65} \approx 8,1$ см. Так находят расстояние между центрами окружностей по формуле Эйлера.

Сравнение нескольких треугольников

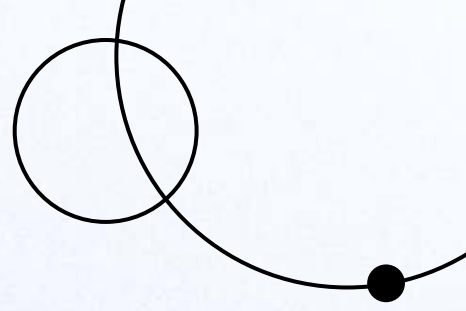


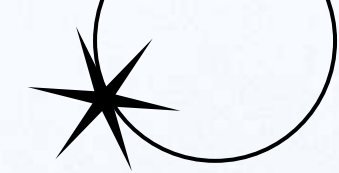
Таблица показывает, как по формуле Эйлера меняется расстояние между центрами O и I при разных радиусах окружностей.

Треугольник	R	r	OI
1	10	3	$\approx 4,0$
2	12	4	$\approx 3,46$
3	13	4	$\approx 8,06$
4	6	3	0

При равенстве $R = 2r$ расстояние OI равно 0, значит центры совпадают. В остальных примерах OI зависит от сочетания радиусов и не сохраняет одинаковое значение.

★ Вычисления по формуле $OI^2 = R(R - 2r)$.

Схема треугольника с двумя окружностями



Два центра

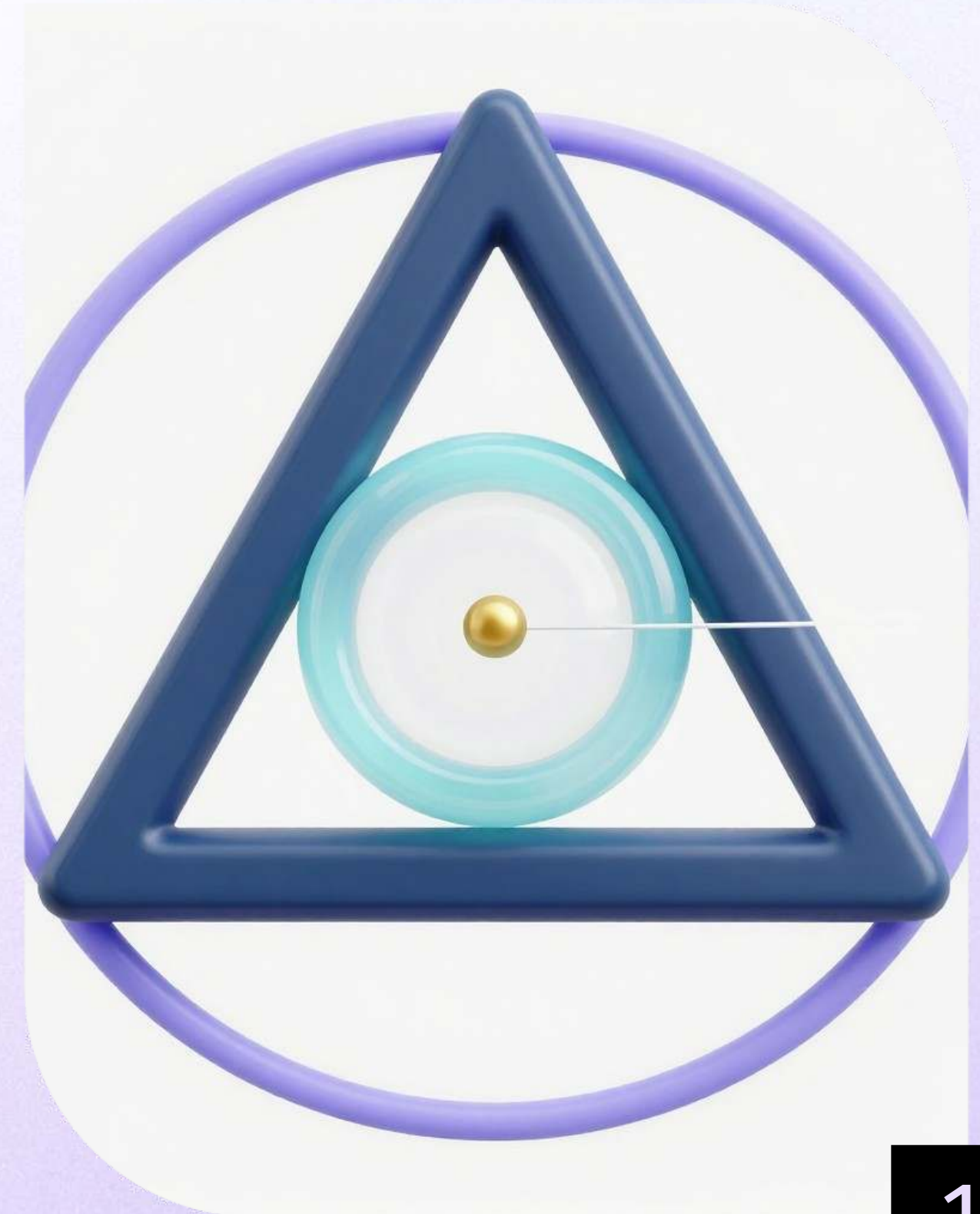
На схеме хорошо видно, где находятся центр описанной окружности O и центр вписанной окружности I . Эти точки отмечают разные, но связанные свойства треугольника.

Радиусы окружностей

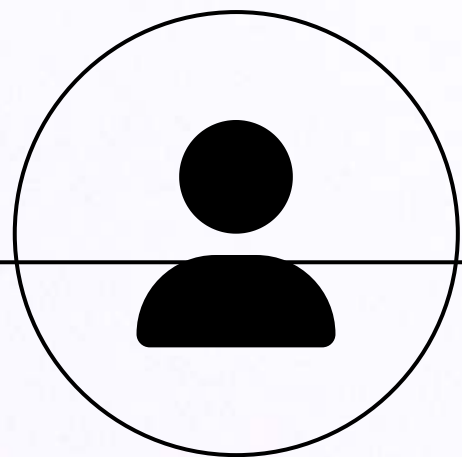
Отрезки R и r показывают расстояния от центров до окружностей. По ним можно понять, как устроены обе окружности и почему формула Эйлера связывает именно эти величины.

Связь с формулой

Отрезок OI соединяет два центра и на рисунке показывает искомое расстояние. Чертёж помогает увидеть, как буквенная запись превращается в понятную геометрическую задачу.

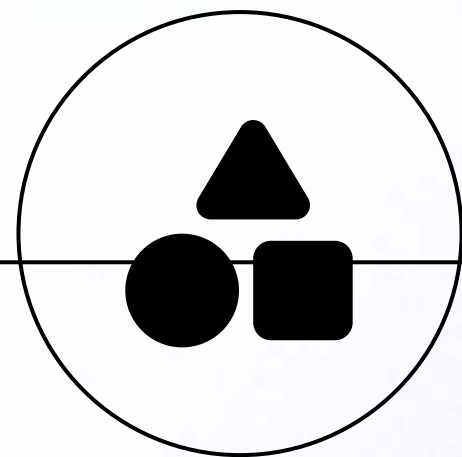


Главное о Леонарде Эйлере



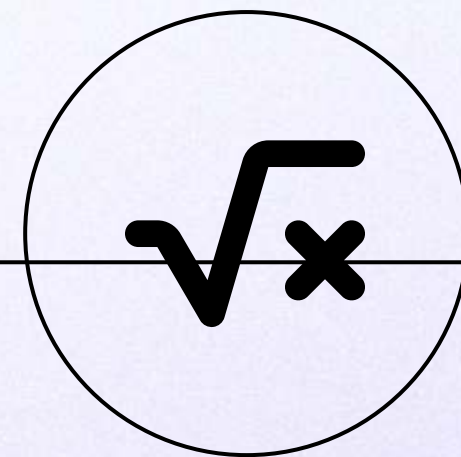
Выдающийся математик

Леонард Эйлер жил в XVIII веке и считается одним из самых известных математиков в истории. Его работы повлияли на развитие алгебры, геометрии и многих других разделов математики.



Изучал геометрию

Эйлер особенно интересовался свойствами треугольников, окружностей и их центров. Поэтому формула о расстоянии между O и I связана именно с его именем и геометрическими исследованиями.



Удобная школьная запись

В школьной задаче важнее всего сама связь между радиусами и расстоянием OI . Формула Эйлера позволяет находить это расстояние быстро, без долгих измерений по чертежу.

Проверка результата на здравый смысл

- **Большая вписанная окружность**

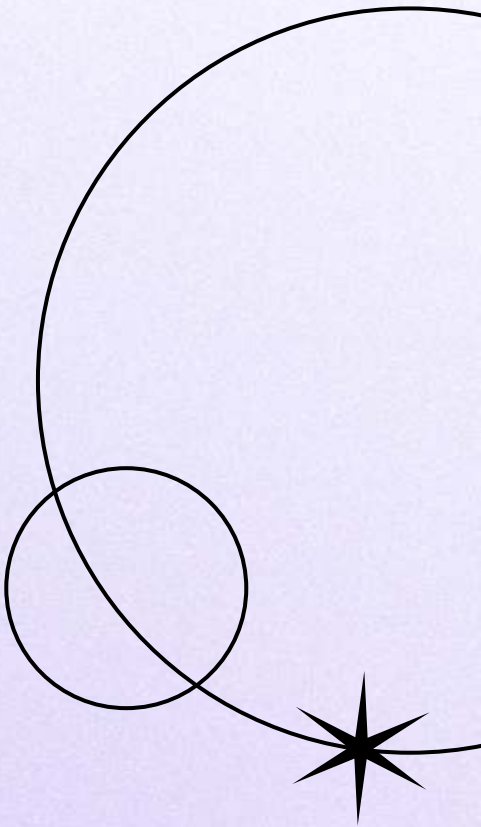
Если радиус r становится почти равным половине R , то выражение $R - 2r$ уменьшается. Значит, расстояние OI должно быть маленьким, и такой ответ выглядит естественно.

- **Маленькая вписанная окружность**

Когда вписанная окружность заметно меньше, подкоренное выражение обычно увеличивается. Тогда расстояние между центрами становится больше, и это тоже согласуется с геометрическим рисунком.

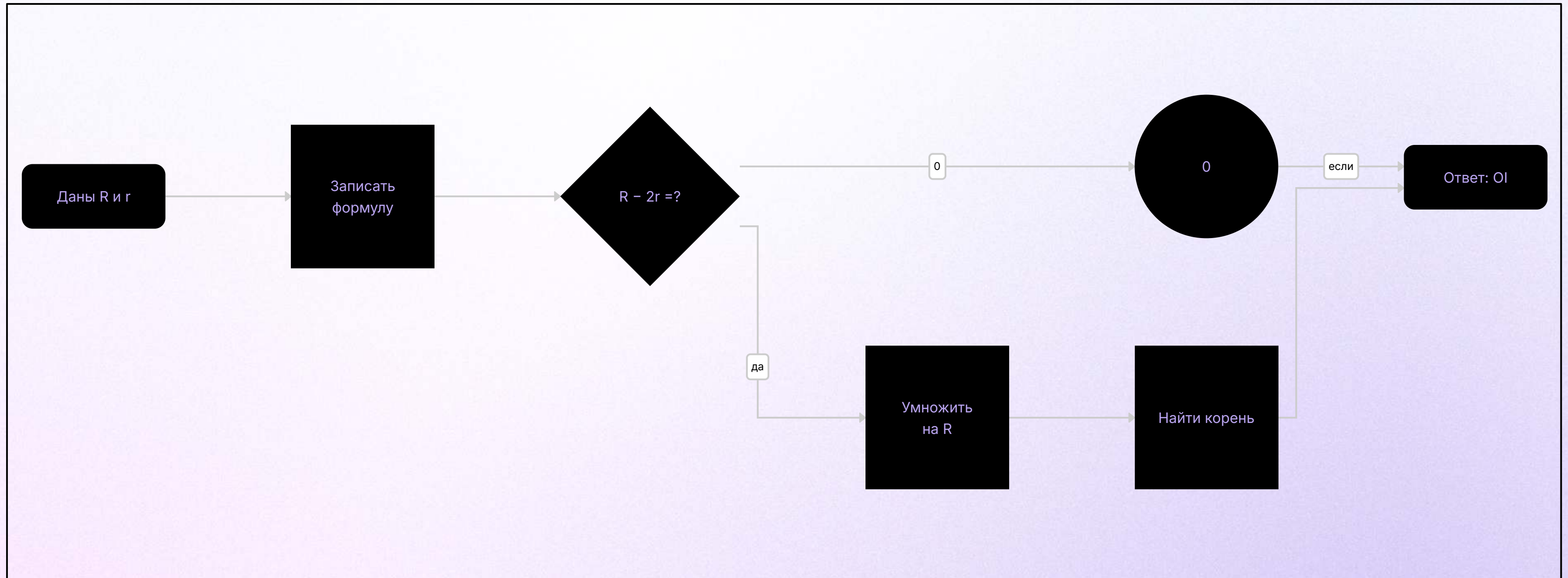
- **Сравнение с чертежом**

После вычислений полезно мысленно сравнить ответ с изображением треугольника. Если результат явно не подходит к виду фигуры, значит, где-то допущена ошибка в подстановке или вычислениях.



Алгоритм решения задач по формуле Эйлера

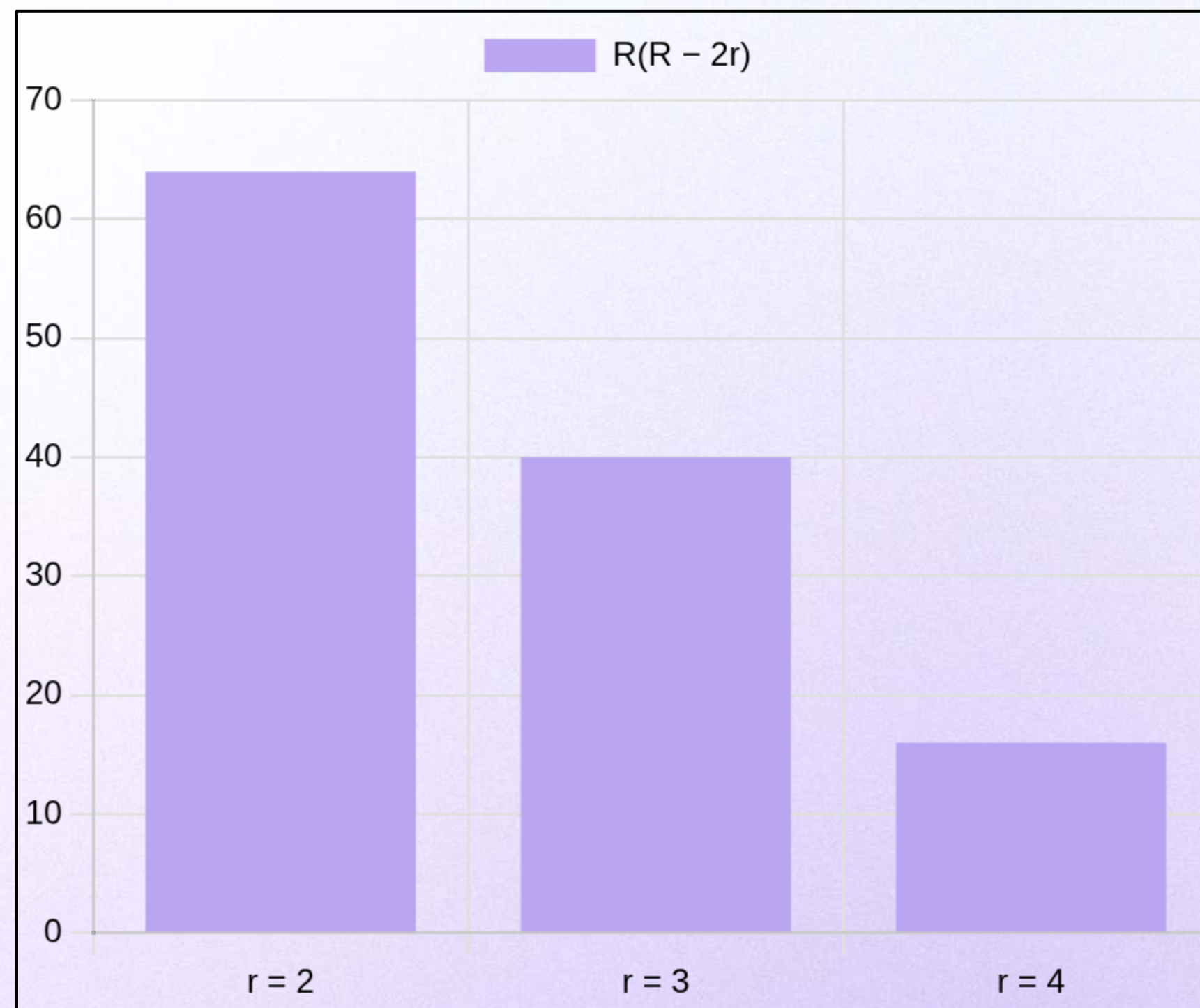
Последовательность действий при нахождении расстояния между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника.



Как радиус вписанной окружности влияет на OI

При одном и том же R уменьшается подкоренное выражение, а значит и само расстояние OI становится меньше.

Чем больше r при фиксированном R , тем меньше значение $R(R - 2r)$.
Следовательно, центры O и I сближаются.



★ Примеры рассчитаны по формуле $OI^2 = R(R - 2r)$ при $R = 8$.

Типичные ошибки при вычислении

1

Забывают квадрат

Иногда сразу пишут $OI = R(R - 2r)$, хотя формула содержит квадрат расстояния. Сначала нужно вычислить OI^2 , а затем извлечь квадратный корень из результата.

2

Путают радиус и диаметр

Вместо r иногда подставляют диаметр вписанной окружности. Это приводит к неверному ответу, поэтому важно внимательно смотреть на обозначения и не смешивать разные величины.

3

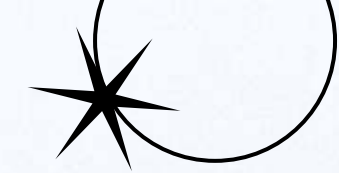
Пропускают корень

После умножения получают число под корнем и останавливаются слишком рано. Но нужно обязательно найти квадратный корень, потому что именно он даёт длину отрезка OI .

4

Смешивают точки

Центр I — это не точка касания окружности со стороной, а особая точка пересечения биссектрис. Если перепутать их, построение и ответ окажутся неверными.



Где используется формула Эйлера

Геометрические задачи

Формула помогает находить расстояние между центрами окружностей в задачах на треугольники. Она особенно полезна, когда известны только радиусы R и r , а длину OI нужно получить быстро.

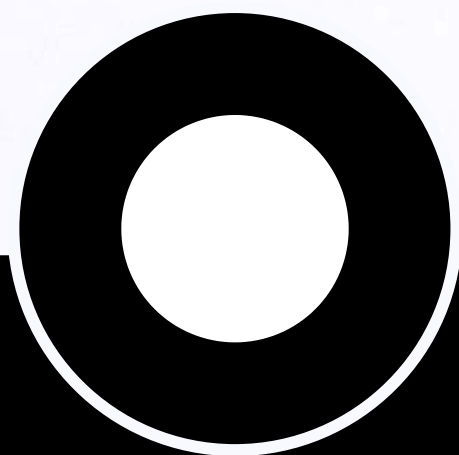
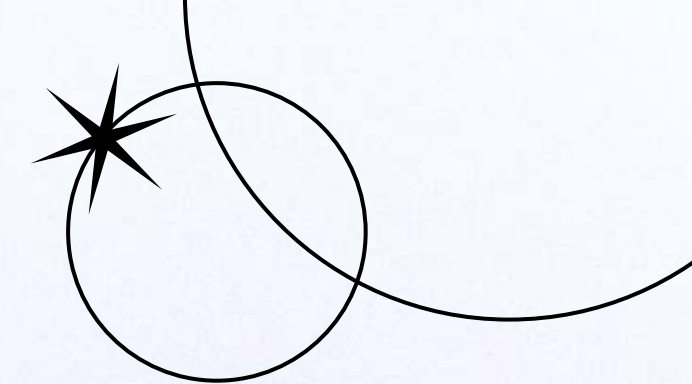
Сравнение треугольников

С её помощью удобно сравнивать разные треугольники по расположению центров. Даже без точных измерений сторон можно понять, у какого треугольника центры находятся ближе или дальше.

Проверка построений

Если чертёж уже есть, но измерять его неудобно, формула Эйлера заменяет длинные вычисления по рисунку. Это экономит время и делает решение более точным.

Все главные обозначения в одном месте



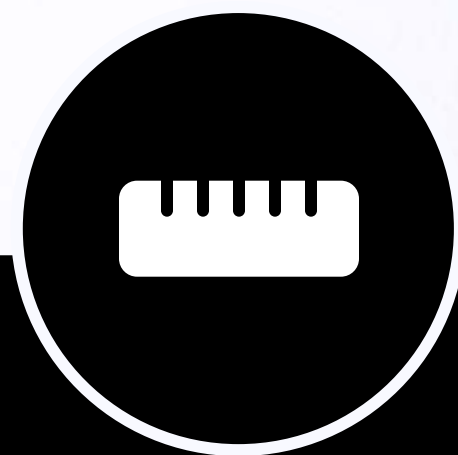
Центр O

Буквой O обозначают центр описанной окружности треугольника. Это точка, которая равноудалена от всех вершин и находится на одинаковом расстоянии от них.



Центр I

Буквой I обозначают центр вписанной окружности. Он равноудалён от всех сторон треугольника и лежит в точке пересечения его биссектрис.



Радиус R

R — радиус описанной окружности. Он равен расстоянию от центра O до любой вершины треугольника и показывает размер описанной окружности.



Радиус r

r — радиус вписанной окружности. Это расстояние от центра I до любой стороны треугольника. В формуле Эйлера именно он связан с уменьшением расстояния OI .

Формула, которая связывает центры треугольника

Формула Эйлера показывает, как через радиусы R и r найти расстояние между центрами O и I . Она делает геометрию понятнее, быстрее и помогает увидеть особый случай равностороннего треугольника.