



Измерение углов, связанных с окружностью

Находим величину угла по тому, где стоит вершина и на какую дугу он опирается.

Где встречаются окружность и углы

Окружность окружает нас в колёсах, часах, монетах и компасах. В 7 классе важно распознавать элементы: центр, радиус, диаметр, хорду, дугу и касательную. Углы удобно измерять в градусах, а полный круг — 360° .



Центральный угол и дуга

Центральный угол имеет вершину в центре окружности, а его стороны — это радиусы. Он «смотрит» на дугу, соединяющую концы радиусов, и показывает её градусную меру.

Величина центрального угла равна величине соответствующей дуги. Поэтому, если центральный угол равен 120° , то дуга, на которую он опирается, тоже равна 120° .

Так как полная окружность составляет 360° , любые дуги можно сравнивать и находить через градусы. Это позволяет переводить задачу про углы в задачу про дуги и обратно.

Сравнение основных углов окружности

На рисунке одна и та же дуга используется в трёх случаях, поэтому различие в значениях углов объясняется положением вершины и видом сторон.

Диаграмма подчёркивает однотипную зависимость: центральный угол совпадает с дугой, а два других случая дают ровно половину.

Основные правила измерения углов

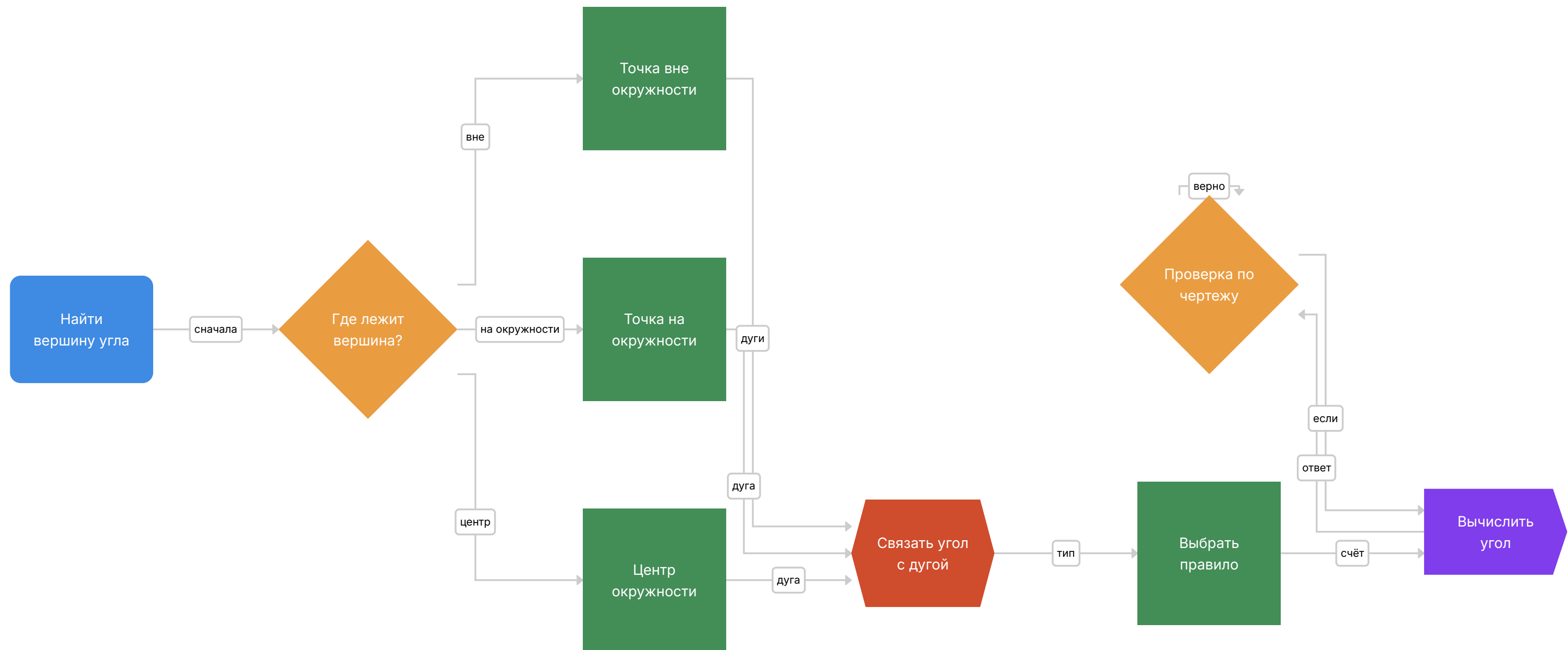
Случай	Формула
Центральный угол	$\angle = \text{дуга}$
Вписанный угол	$\angle = 1/2 \text{ дуги}$
Касательная и хорда	$\angle = 1/2 \text{ дуги}$
Пересечение хорд внутри	$\angle = 1/2(\text{сумма дуг})$
Вершина вне окружности	$\angle = 1/2(\text{разность дуг})$
Вывод	Сначала вид угла

Сначала определите вид угла по положению вершины и по линиям на чертеже, затем подставляйте нужную связь между углом и дугами.

Все формулы сводятся к одной идее: угол определяется дугами, а множитель (1/2, сумма или разность) зависит от расположения вершины и отрезков.

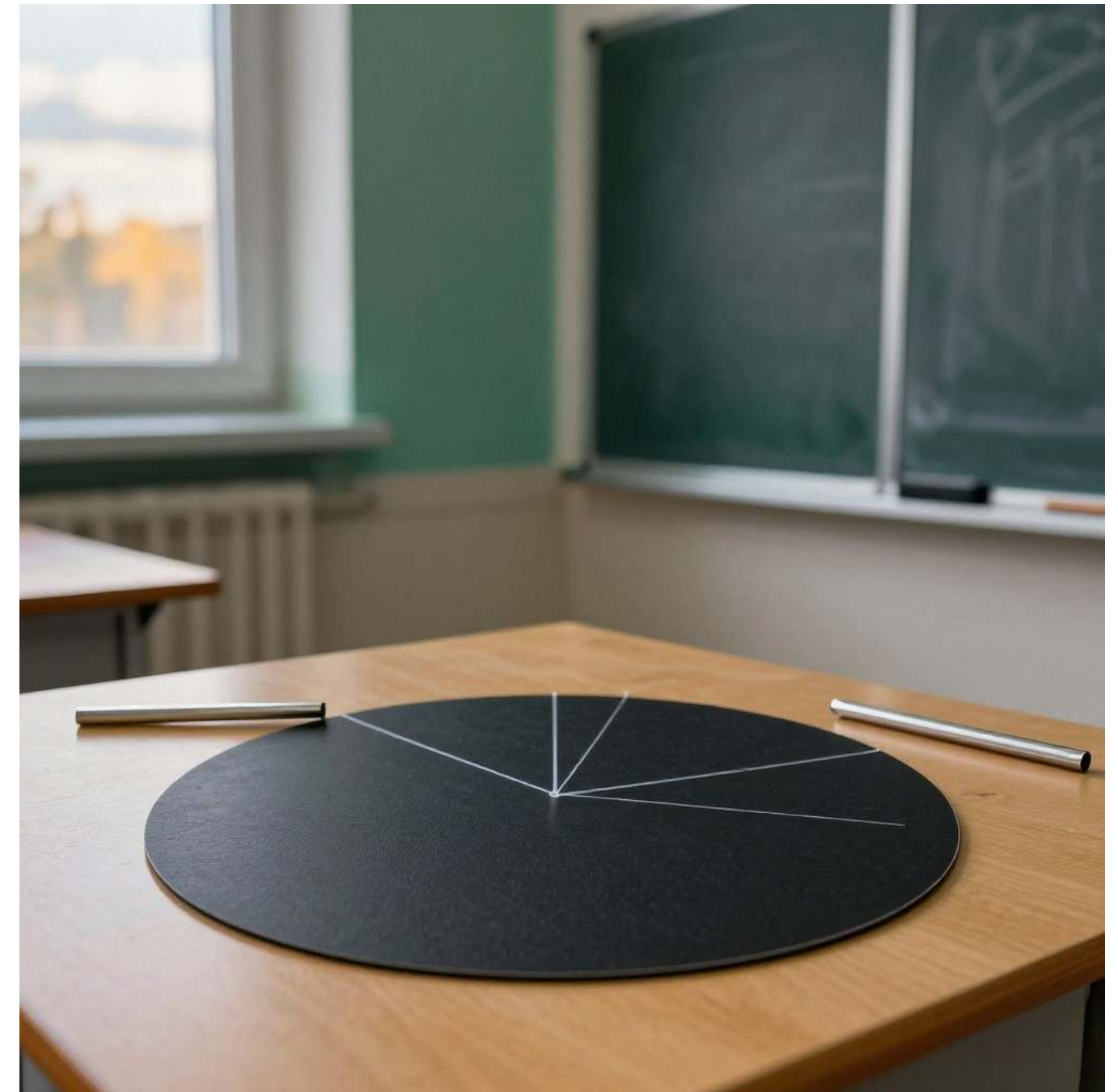
Алгоритм нахождения угла по чертежу

Последовательность действий для решения задач на углы, связанные с окружностью.



Вписанный угол

- 1** Вершина вписанного угла лежит на окружности, а его стороны пересекают окружность в двух точках. Угол «держит» дугу, соединяющую эти точки.
- 2** Вписанный угол всегда равен половине центрального угла, который опирается на ту же дугу. Например, дуга 100° соответствует вписанному углу 50° , поэтому вычисления легко сверять по рисунку.



Касательная касается окружности в одной точке, а хорда соединяет две точки окружности. Угол между ними равен половине дуги между концами хорды.

80°

**Тогда величина угла будет
вдвое меньше и составит
40°.**

Справочное правило из темы: «угол между касательной и хордой = $1/2$ дуги» (пример: дуга 80°).

Углы внутри окружности

Если две хорды пересекаются внутри окружности, образуется угол, который связан с дугами, лежащими напротив этого угла. По сути, «смотрят» не на отрезки, а на дуги, разделённые ими.

Величина угла равна половине суммы двух дуг напротив него. Например, дуги 70° и 50° дают угол 60° , потому что $(70^\circ + 50^\circ) / 2 = 60^\circ$.

Важно выбрать именно те дуги, которые смотрят на угол с противоположных сторон. Это особенно нужно, когда на чертеже несколько пересечений и легко перепутать дуги.

Углы вне окружности

Если вершина угла находится вне окружности, а его стороны пересекают окружность, получится внешний угол. Его величина зависит от двух дуг, «лежащих против» сторон угла.

Для такого случая угол равен половине разности соответствующих дуг. Например, дуги 140° и 60° дают угол 40° , так как $(140^\circ - 60^\circ) / 2 = 40^\circ$.

Это правило применяют не только при двух секущих, но и когда одна прямая касается окружности, а другая является секущей. Также оно подходит для двух линий, выходящих из одной внешней точки.

Чтобы не ошибиться, аккуратно определите, какие именно дуги соответствуют каждой стороне угла, и проверьте направление разности по рисунку.

Как изменяется угол при одной и той же дуге

На одном и том же наборе дуг видно: центральный угол равен дуге, а вписанный — ровно в два раза меньше. Поэтому при росте дуги углы увеличиваются пропорционально.

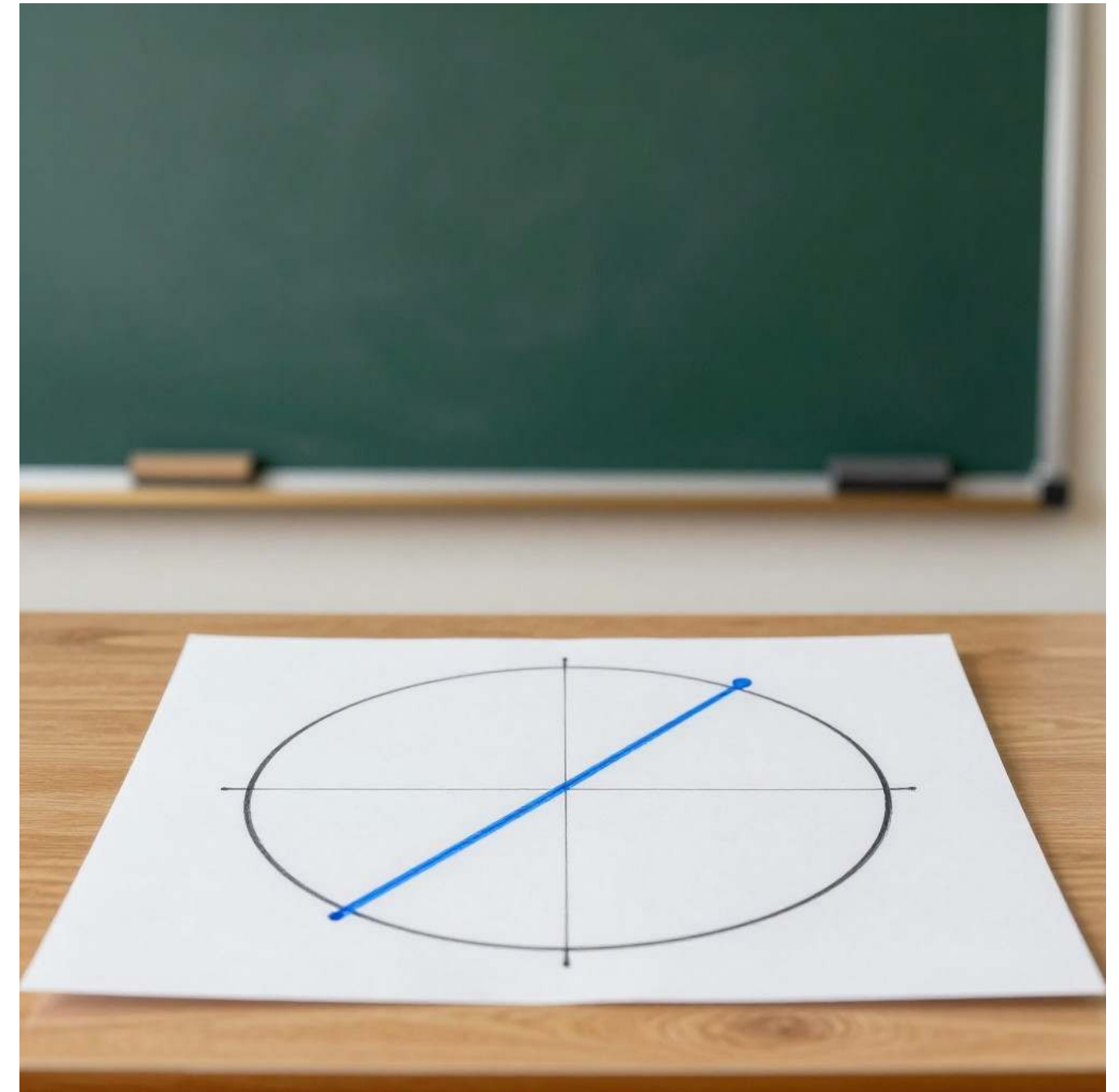
Две зависимости дают разные «темпы»: для центрального случая отношение дуги к углу 1:1, для вписанного — 1:2. Это помогает быстро проверять вычисления.

Построение по школьным соотношениям: центральный угол $u=x$, вписанный $u=x/2$ (использованы дуги 40° , 80° , 120° , 160° , 200°).

Вписанный угол в полуокружности

Если вписанный угол опирается на диаметр, он всегда равен 90° . Диаметр делит окружность на две полуокружности по 180° , значит соответствующая дуга составляет 180° , а половина — 90° .

Чтобы не вычислять каждый раз, на чертеже отмечают диаметр, точку на окружности и прямой угол у вершины вписанного угла. Это сразу подтверждает правильность построения и результата.



Сводная таблица формул

Быстрое сопоставление вида угла и нужной формулы: выбери вариант по положению вершины и по тому, какие линии образуют угол. Одна и та же дуга работает по-разному при смене вершины.

Главная подсказка: сначала определи вид угла, затем подставь формулу. Даже при одной дуге результат меняется, потому что меняется положение вершины.

Вид угла	Формула
Центральный	угол = дуге
Вписанный	угол = 1/2 дуги
Касательная и хорда	угол = 1/2 дуги
Внутри окружности	угол = 1/2 (сумма дуг)
Вне окружности	угол = 1/2 (разность дуг)
Одна дуга	может давать разные углы при другой вершине

Типичные ошибки при решении задач

Путаница дуги и хорды



Часто путают, что именно нужно брать: величину дуги, на которую опирается угол, а не длину хорды. Чтобы избежать ошибки, мысленно обозначь концы угла и дугу между ними.

Выбор не той дуги



Если точки делят окружность на две дуги, важно выбрать ту, которая «смотрит» на угол. Берут дуги, лежащие напротив вершины по нужным сторонам, иначе формула даст неверный знак или величину.

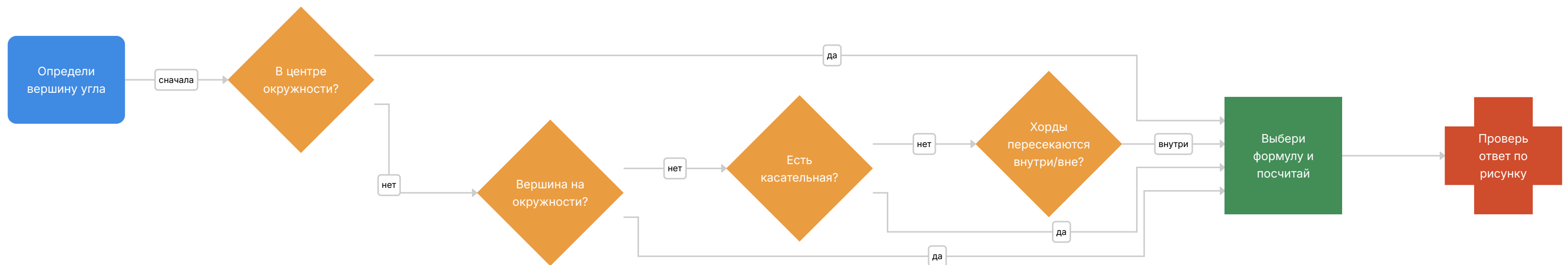
Смешивание внутренних и внешних случаев



В задачах с вершиной внутри или вне окружности используются разные выражения: сумма или разность дуг. Перед вычислениями проверь, где именно находится вершина относительно окружности и входящих линий.

Как выбрать нужную теорему

Логика выбора: сначала позиция вершины, затем тип линий на чертеже (радиусы, хорды, касательная или секущие).



Примеры из окружающей жизни



Колёса и спицы

Когда колесо вращается, различные положения спиц можно рассматривать как стороны углов, связанных с окружностью. Чем больше дуга между «точками пересечения», тем больше центральный угол, который они образуют.



Циферблат часов

На циферблате между цифрами 12 и 3 получается угол 90° , потому что отрезок между положениями стрелок соответствует четверти окружности. Понимание дуг помогает быстрее оценивать углы по времени.



Дорожные развязки и секторы

Круговые участки движения часто строят как «сектора» окружности. Если известны границы дуги, можно оценить углы поворота: они напрямую связаны с долями окружности и тем самым с градусной мерой.

Какие случаи встречаются чаще в школьных задачах

Даже в задачах одного рисунка могут комбинироваться разные типы углов, но ядро решения обычно опирается на вписанные и центральные случаи из-за частого появления дуг.

Диаграмма показывает, что почти две трети заданий связаны с вписанными и центральными углами. Если уверенно освоить эти правила, станет проще решать большинство примеров.

Проверка ответа после вычислений

Сверь вид угла: вершина в центре, на окружности или вне неё. От этого зависит формула. Если тип выбран неверно, даже правильные дуги приведут к ошибочному значению угла.

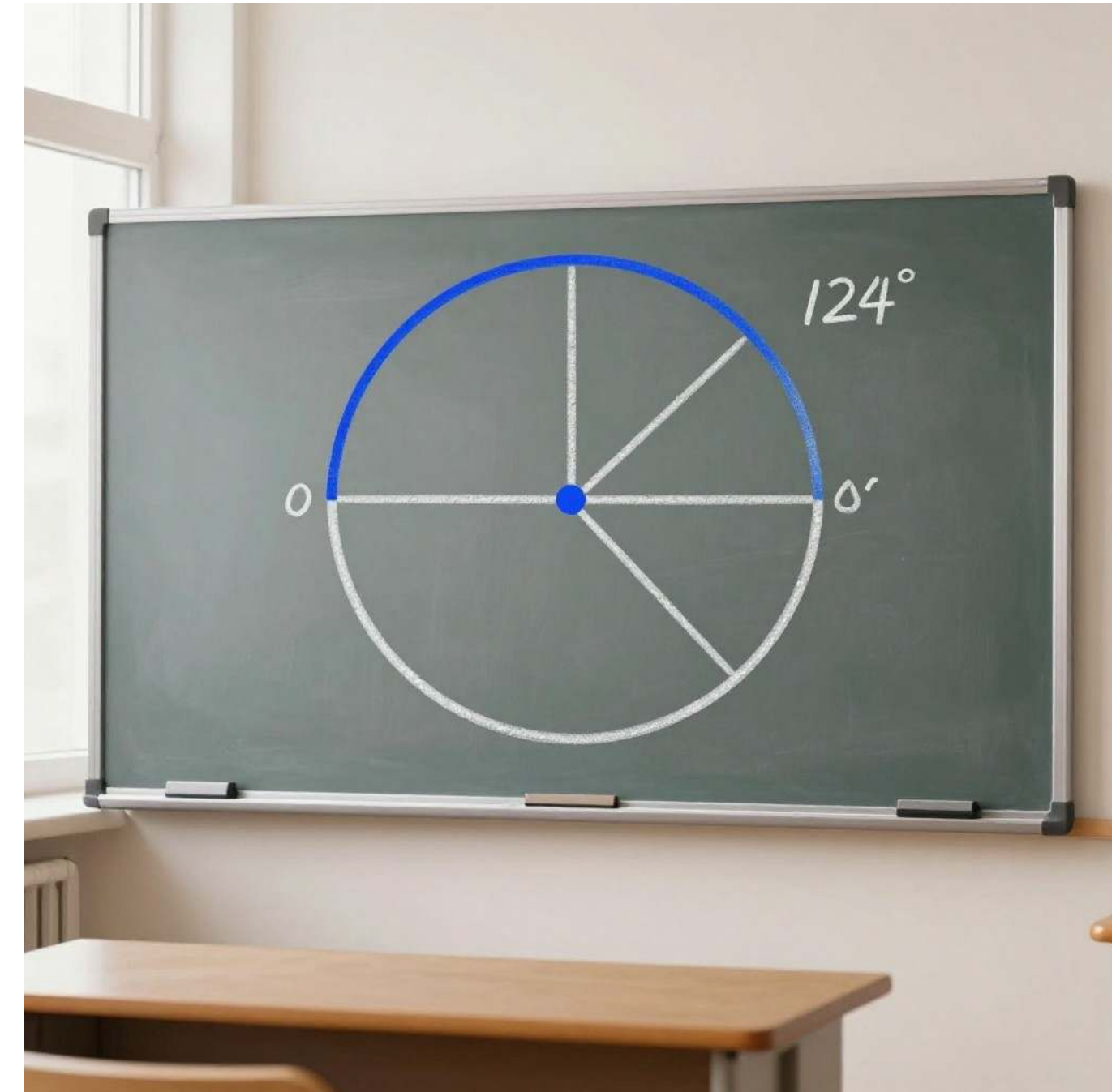
Убедись, что дуга выбрана той же стороны, что и угол на рисунке. Для вписанного угла итог всегда должен быть меньше дуги, а связь с половиной дуги — сохраняться.

Для задач с несколькими неизвестными проверь согласование суммы или разности дуг с требуемыми 180° либо 360° (в зависимости от геометрической ситуации). Это помогает найти логические ошибки в вычислениях.

Мини-задача с несколькими углами

Пусть центральный угол равен 124° . Тогда вписанный угол, опирающийся на ту же дугу, равен половине центрального: $124^\circ/2 = 62^\circ$. Здесь важно не менять дугу.

Если на рисунке есть касательная и хорда, причём угол между ними опирается на ту же дугу, он тоже будет равен 62° . Один чертёж позволяет находить несколько величин по разным теоремам.



Главные выводы урока

Углы, связанные с окружностью, определяются положением вершины и дугой, на которую они опираются. Центральный угол равен дуге, а вписанный и угол с касательной — половине дуги; внутренние и внешние случаи используют сумму или разность дуг.