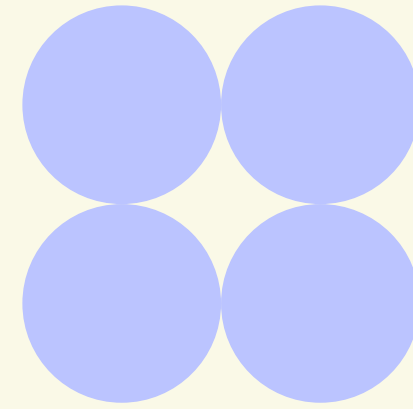


НОД и НОК: два ключевых числа в арифметике

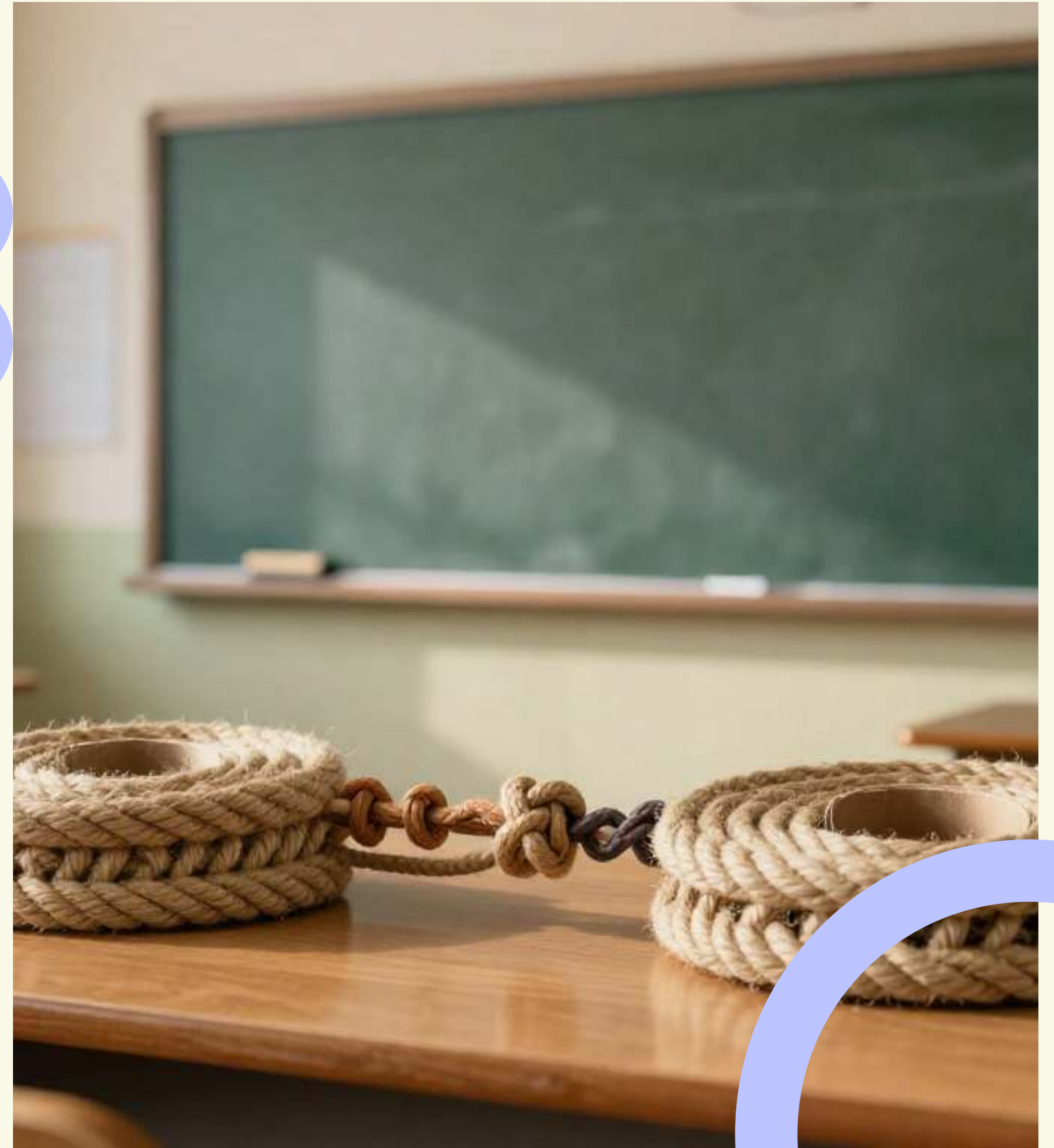
Два числа, которые упрощают деление, дроби
и поиск закономерностей.



Почему НОД и НОК важны в алгебре



Эти понятия помогают сокращать дроби, находить общий знаменатель и разбираться в повторяющихся событиях. Они опираются на делители и кратные, поэтому связывают начальную арифметику с более сложными вычислениями.



Делители и кратные: основа темы

Что такое делитель

Делитель — это число, на которое данное число делится без остатка. У числа 12, например, делители: 1, 2, 3, 4, 6 и 12.

Что такое кратное

Кратное получается при умножении числа на натуральное число. Для 12 первыми кратными будут 12, 24, 36 и 48, а дальше список продолжается.

Простой ориентир

Если число можно разделить на другое без остатка, то второе является его делителем. Если число получается умножением, значит оно кратно исходному.

Главное различие

Делители не превосходят само число, а кратные могут расти почти бесконечно. Именно поэтому их удобно сравнивать, когда ищут общие свойства двух чисел.

Почему это важно

НОД и НОК строятся именно на делителях и кратных. Без понимания этих двух понятий трудно уверенно сокращать дроби и находить общие знаменатели.

6

— это НОД чисел 18 и 24.

Пример из условия: $\text{НОД}(18, 24) = 6$

Это число делит 18 и 24
без остатка и помогает упростить
дроби и выражения.

12

— это НОК чисел 4 и 6.

Пример из условия: $\text{НОК}(4, 6) = 12$

Это самое маленькое число, которое делится на 4 и 6 без остатка, поэтому удобно для дробей и повторяющихся процессов.

Сравнение НОД и НОК

Понятие	Что ищем	Пример	Ответ
НОД	общий делитель	18 и 24	6
НОК	общее кратное	4 и 6	12

Примеры из условия



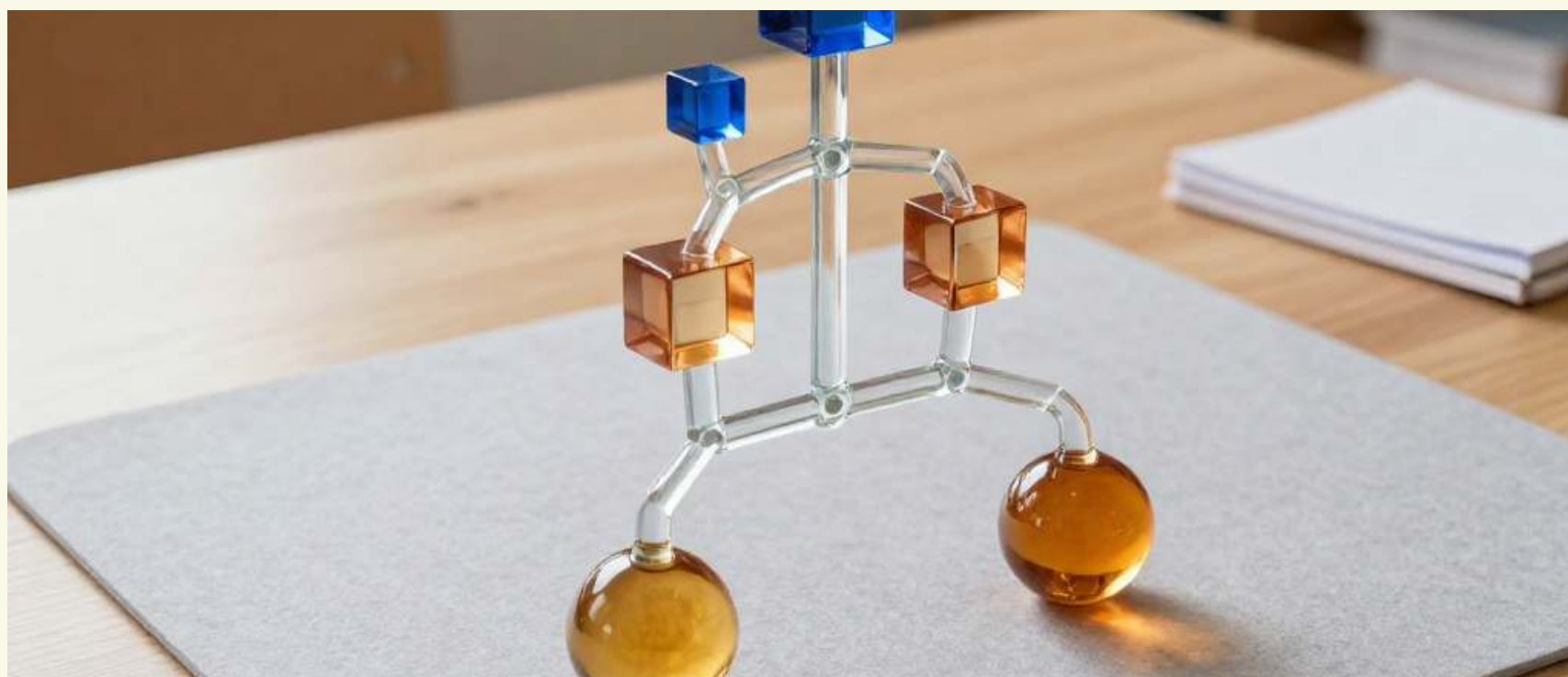
Таблица показывает, что эти понятия похожи по форме, но решают разные задачи.

НОД связан с делением без остатка, а НОК — с кратностью. Путать их нельзя, потому что результаты используются в разных задачах.

Разложение на простые множители

1 Число 36: разложение в ветвях

Число 36 удобно представить как произведение простых множителей: $2 \times 2 \times 3 \times 3$. На дереве разложения видно, как число постепенно распадается на более простые части, из которых потом легко собрать НОД или НОК.



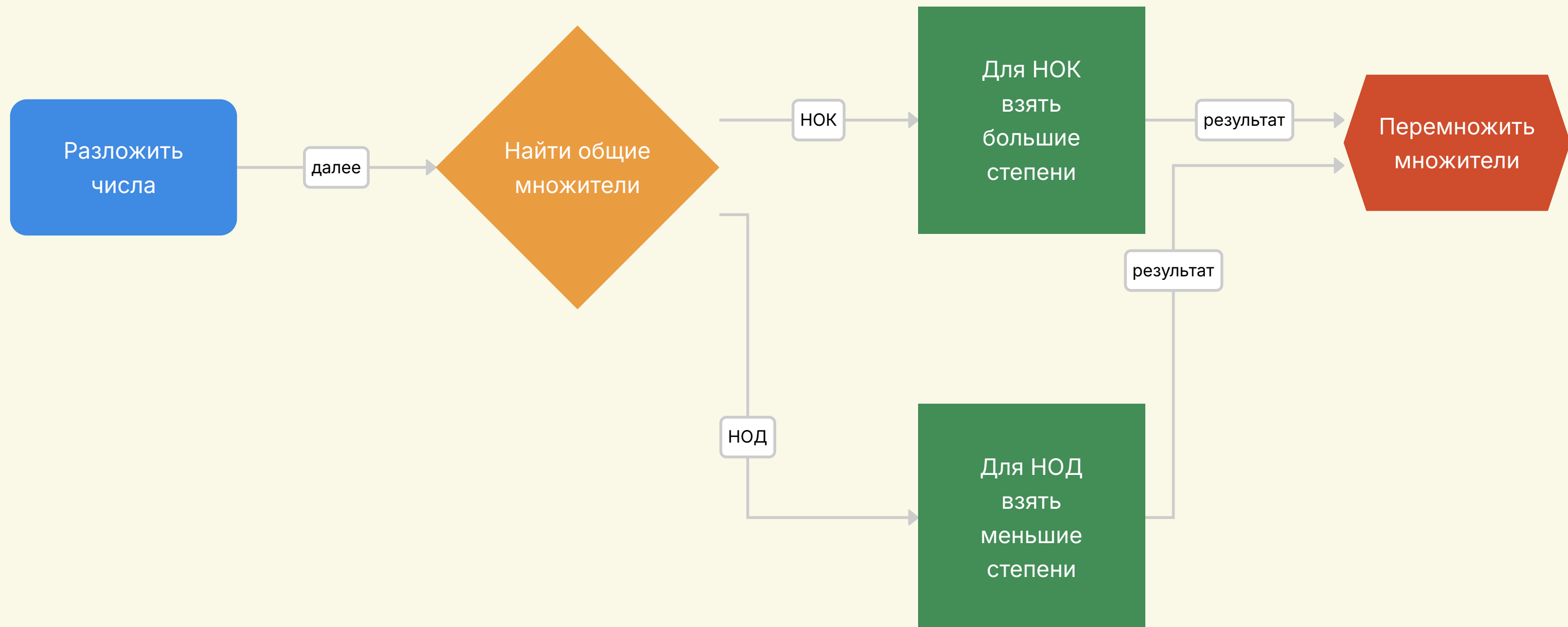
2 Число 60: другая ветвь того же дерева

Число 60 раскладывается как $2 \times 2 \times 3 \times 5$. Сравнение двух деревьев помогает заметить общие множители и выбрать подходящие степени для ответа.

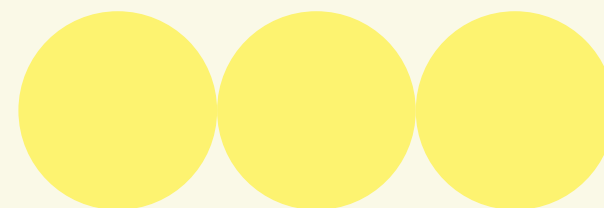


Как находить НОД и НОК по разложению

Последовательность шагов для работы с простыми множителями



Алгоритм Евклида: идея и смысл



1

Берем два числа

Начинают с двух натуральных чисел. Большое делят на меньшее и записывают остаток, потому что именно он показывает, что осталось после неполного деления.

2

Заменяем числа

Затем предыдущее меньшее число становится большим, а остаток — новым меньшим. Такая замена сохраняет НОД, но делает задачу заметно проще.

3

Повторяем шаги

Деление с остатком повторяют снова и снова, пока остаток не станет равен нулю. Каждый новый шаг обычно использует уже меньшее число.

4

Находим ответ

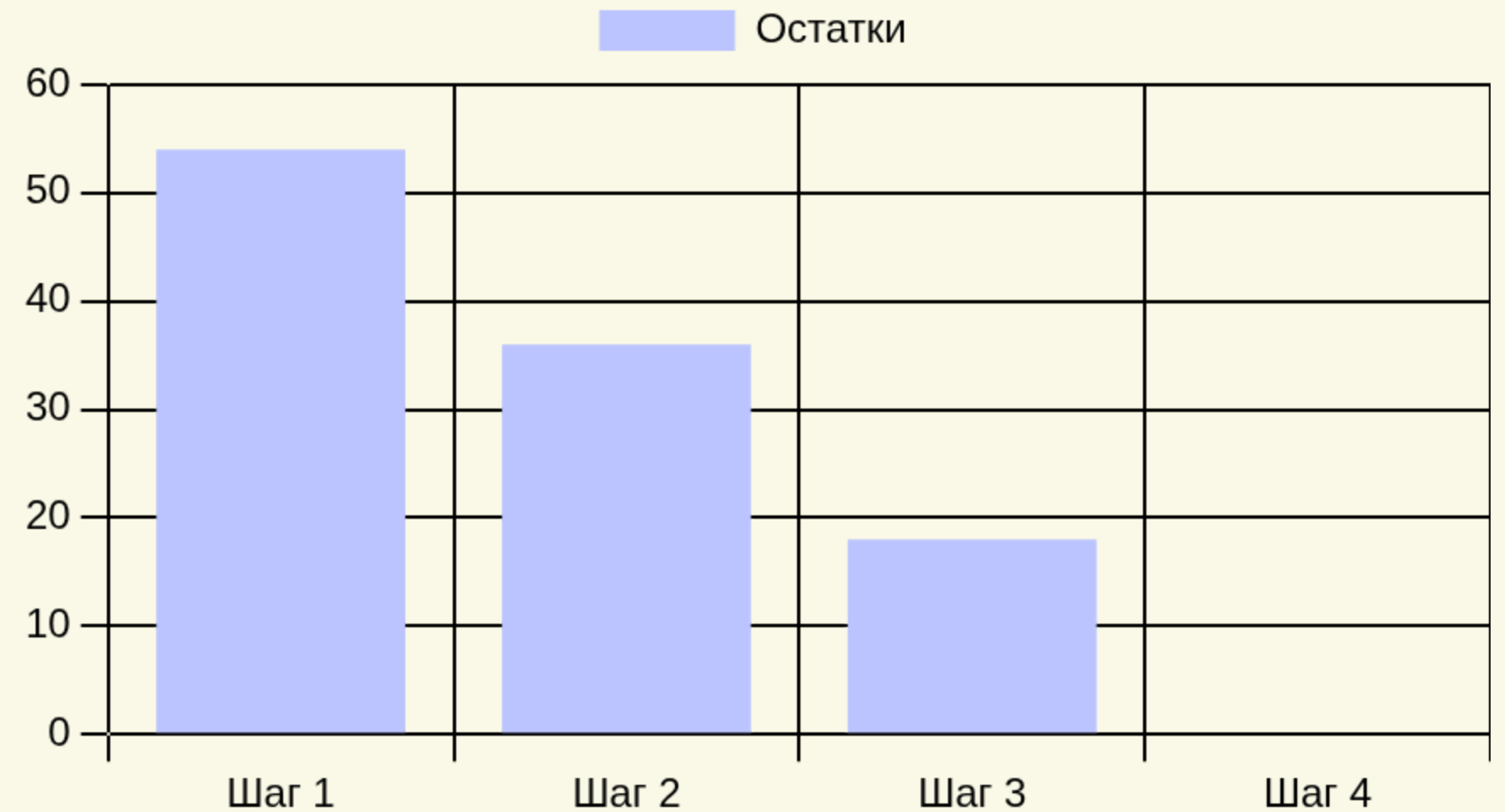
Последний ненулевой остаток и есть НОД. Этот способ особенно полезен для больших чисел, когда проверять все делители вручную слишком долго.

Алгоритм Евклида на примере 252 и 198



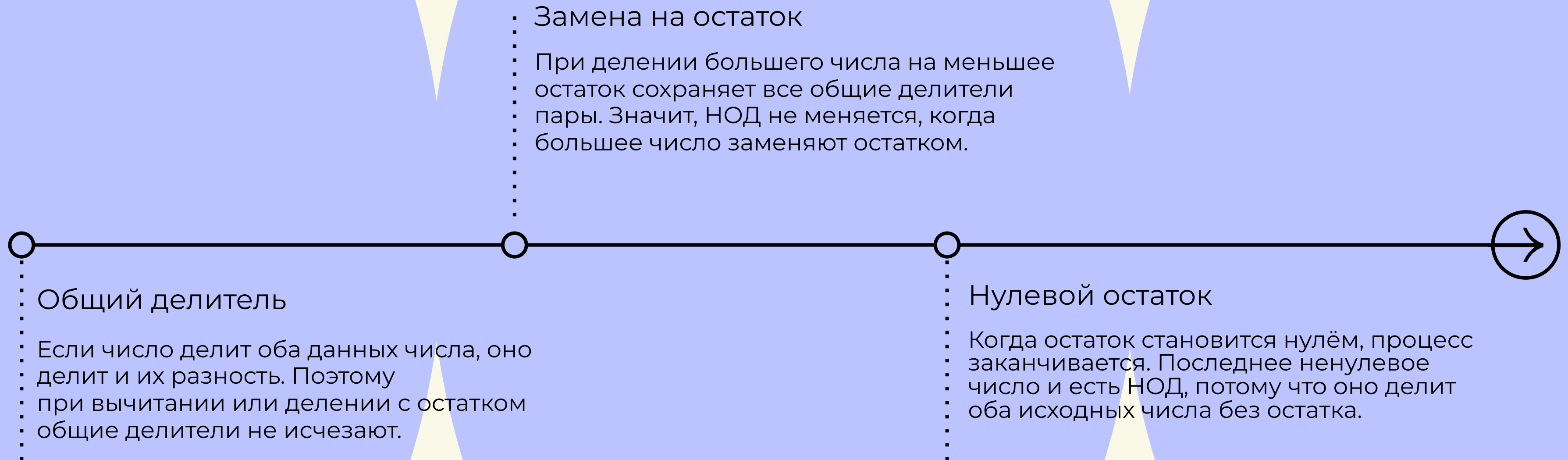
На каждом шаге остаток становится меньше, поэтому вычисления быстро приближают к ответу.

Последний ненулевой остаток равен 18, значит НОД (252, 198) = 18.



Вычисление по алгоритму Евклида для чисел 252 и 198

Почему алгоритм Евклида работает



Связь НОД и НОК

1

Основная формула

Для любых натуральных чисел произведение a и b равно произведению их НОД и НОК. Это равенство связывает делимость и кратность в одной записи.

2

Проверка вычислений

Если известны НОД и НОК, можно быстро проверить ответ: подставьте значения в формулу и сравните обе части. Несоответствие сразу показывает ошибку в вычислениях.

3

Нахождение неизвестного

Когда одно из чисел, НОД или НОК, неизвестно, формула помогает найти его через другие данные. Для примера 6 и 15 получаем $90 = 3 \times 30$.

Примеры вычислений НОД и НОК

В таблице показаны несколько пар чисел, их НОД и НОК, а также способ решения.

Разные методы приводят к одному результату; выбор способа зависит от удобства и вида чисел.



Числа	НОД	НОК	Способ
12 и 18	6	36	множители
20 и 30	10	60	множители
21 и 28	7	84	Евклид
35 и 50	5	350	множители

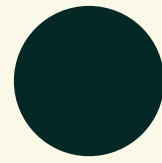
Учебные примеры по теме НОД и НОК

Типичные ошибки при поиске НОД и НОК



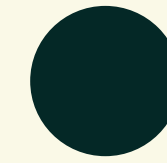
Путают понятия

Иногда делители смешивают с кратными: ищут число, которое делится на оба, вместо числа, которое делит оба. Это приводит к неверному ответу уже на первом шаге.



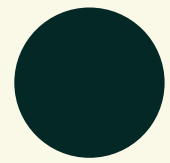
Пропускают степени

При поиске НОК важно учитывать все простые множители с наибольшими степенями. Если забыть хотя бы один множитель, общий кратный получится слишком маленьким.



Не проверяют ответ

Полезно использовать формулу $a \times b = \text{НОД} \times \text{НОК}$. Такая проверка быстро выявляет большинство ошибок и показывает, совпадают ли оба результата между собой.



Берут не тот максимум

НОД должен быть наибольшим среди общих делителей. Если остановиться на первом подходящем числе, результат окажется меньше правильного и не поможет при сокращении дробей.



Рано останавливаются

В алгоритме Евклида нужно идти до нулевого остатка. Если завершить вычисления раньше, последнее ненулевое число может оказаться не НОД, а промежуточным результатом.

Где встречаются НОД и НОК в жизни

Равные наборы

НОД помогает без остатка разделить 24 конфеты и 36 печений на одинаковые наборы. Так удобно понять, сколько одинаковых пакетов можно собрать.

Общий ритм событий

НОК описывает момент, когда события совпадают снова. Если автобусы приходят каждые 12 и 18 минут, одновременно они будут на остановке через 36 минут.

Упрощение дробей

В задачах с дробями НОД позволяет сократить числитель и знаменатель на одно и то же число. Это делает запись короче и вычисления понятнее.

Проверка расписаний

Алгоритмы на основе кратных используют при составлении повторяющихся графиков, где нужно заранее узнать, когда циклы разных процессов снова совпадут.



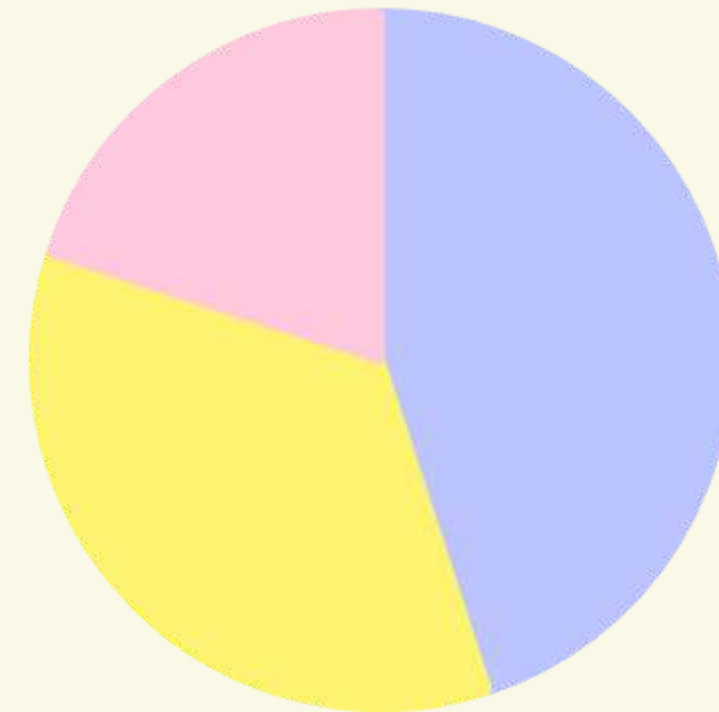
Когда удобнее Евклид, а когда разложение

Диаграмма показывает, что один и тот же пример можно решать разными путями. Главное — выбрать способ, который быстрее приводит к точному ответу.



Для больших чисел выгоднее Евклид, для простых разложений — множители, а формула связи НОД и НОК удобна для проверки.

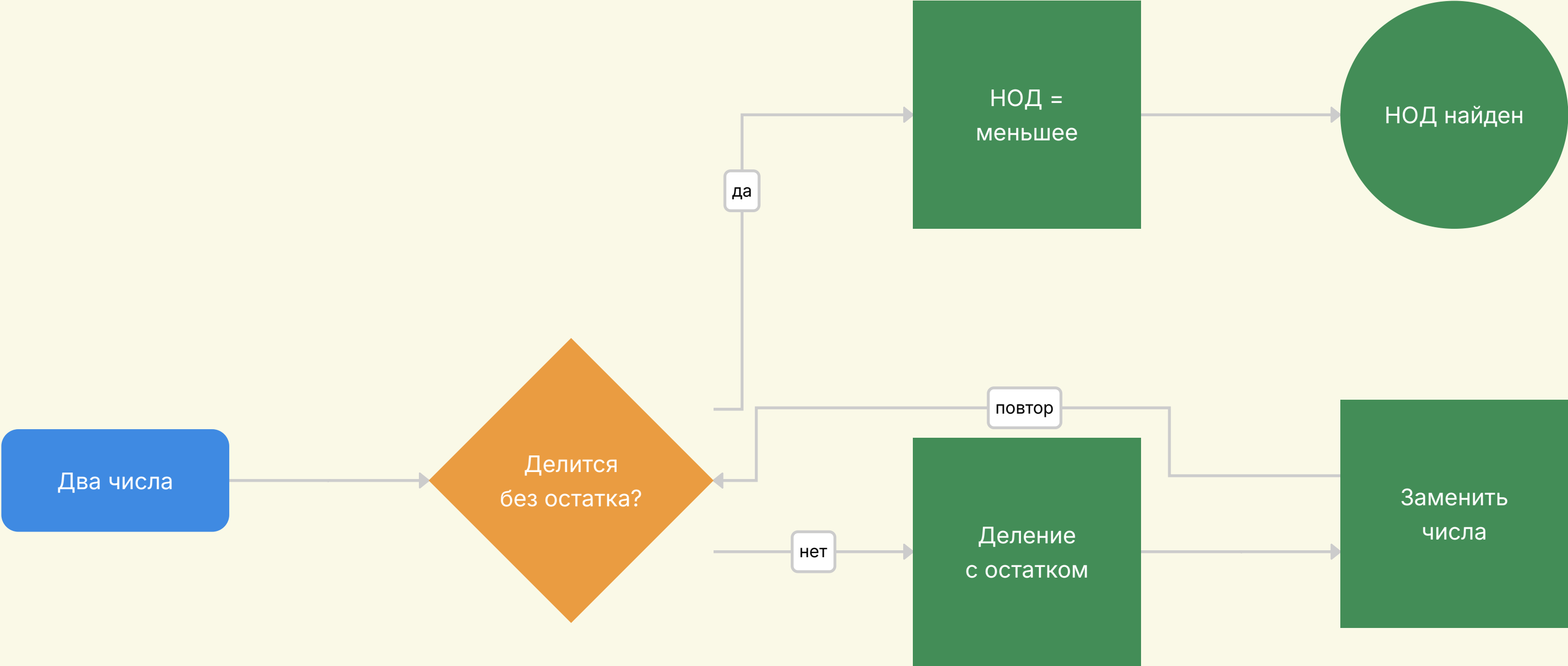
Большие числа — Евклид
Небольшие числа — множители
Проверка ответа — формула



Составлено по правилам выбора способа вычисления в теме НОД и НОК

Пошаговый алгоритм Евклида

Схема показывает последовательность делений с остатком до получения НОД.

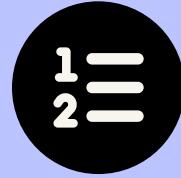


Математический язык темы



НОД и НОК

Обозначения НОД (a, b) и НОК (a, b) позволяют коротко записывать ответы и не путать их при решении задач. Это точный язык школьной арифметики.



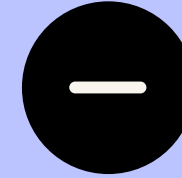
Натуральные числа

Натуральные числа используют для счёта: 1, 2, 3 и далее. Именно с ними работают при поиске делителей, кратных, НОД и НОК.



Деление без остатка

Если число делится на другое без остатка, частное получается целым. Такое деление показывает, что одно число является делителем другого.



Остаток деления

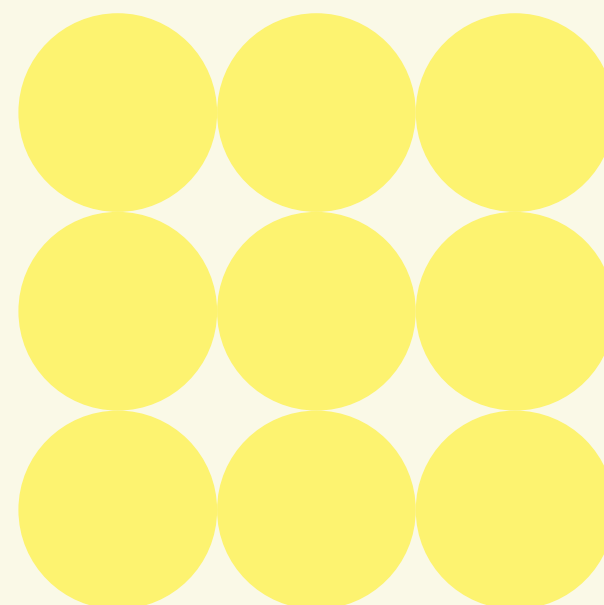
Остаток всегда меньше делителя и показывает, сколько не хватило до полного деления. В алгоритме Евклида именно остаток помогает сделать следующий шаг.



Запись решений

Точные обозначения помогают быстро проверять вычисления и объяснять ход рассуждений. Благодаря им решение выглядит понятно и для ученика, и для учителя.

Мини-проверка понимания на трех примерах



1

8 и 12

Общие делители этих чисел дают НОД 4, а наименьшее общее кратное равно 24. Здесь удобно увидеть, как общий множитель сокращает оба числа.

2

14 и 21

У чисел есть общий делитель 7, поэтому НОД равен 7. Чтобы получить НОК, нужно учесть все множители, и ответ получается 42.

3

16 и 20

В этой паре общий делитель также равен 4, а НОК составляет 80. Пример показывает, что даже при разных разложениях результат можно найти точно.



НОД, НОК и Евклид: что важно запомнить

НОД показывает общий делитель, а НОК — общее кратное двух чисел. Для небольших чисел удобно разложение на множители, а для больших особенно полезен алгоритм Евклида.

