

# Алгебра 8 класса: квадратные уравнения и их применение

Квадратные уравнения: ключ к решению многих школьных задач.

# Почему квадратные уравнения стоит изучать внимательно

01

Эта тема помогает перейти от простых линейных уравнений к более гибким способам рассуждения. Она нужна для работы с формулами, графиками и текстовыми задачами, а также хорошо готовит к контрольным и дальнейшим темам алгебры.

# Общий вид квадратного уравнения

## Запись уравнения

Квадратным называют уравнение вида  $ax^2 + bx + c = 0$ , где неизвестное входит во вторую степень. Такой вид задаёт основу для всех дальнейших способов решения.

## Роль коэффициентов

Коэффициент  $a$  — старший,  $b$  стоит при  $x$ , а  $c$  является свободным членом. Именно по этим трём числам удобно распознавать тип уравнения и выбирать способ решения.

## Условие квадратности

Чтобы уравнение оставалось квадратным, коэффициент  $a$  не должен быть равен нулю. Если  $b$  или  $c$  отсутствуют, уравнение всё равно может быть квадратным, если сохраняется член с  $x^2$ .

## Примеры записи

Примерами служат  $x^2 - 5x + 6 = 0$ ,  $2x^2 = 8$  и  $3x^2 - 12 = 0$ . Во всех случаях можно увидеть степень два и понять, что уравнение относится к одной теме.

## Что важно заметить

Одинаковая форма записи помогает быстро отличать квадратные уравнения от линейных и подсказывает, какие действия будут полезны: разложение, выделение квадрата или формула корней.

# Виды квадратных уравнений и их признаки

Разные виды уравнений отличаются составом коэффициентов и способом решения.

Чем меньше коэффициентов в записи, тем чаще решение получается быстрее и короче.

| Вид       | Пример              | Отсутствует | Особенность                |
|-----------|---------------------|-------------|----------------------------|
| Полное    | $x^2 - 7x + 10 = 0$ | —           | Обычно решается по формуле |
| Без c     | $x^2 - 4x = 0$      | c           | Можно вынести x за скобки  |
| Без b     | $3x^2 - 12 = 0$     | b           | Удобно находить $x^2$      |
| Без b и c | $5x^2 = 0$          | b, c        | Сразу $x = 0$              |

# Решение через разложение на множители

01

## Преобразование

Уравнение  $x^2 - 5x + 6 = 0$  можно переписать как  $(x - 2)(x - 3) = 0$ . Это показывает, что выражение удобно разложить на два множителя.

02

## Нахождение корней

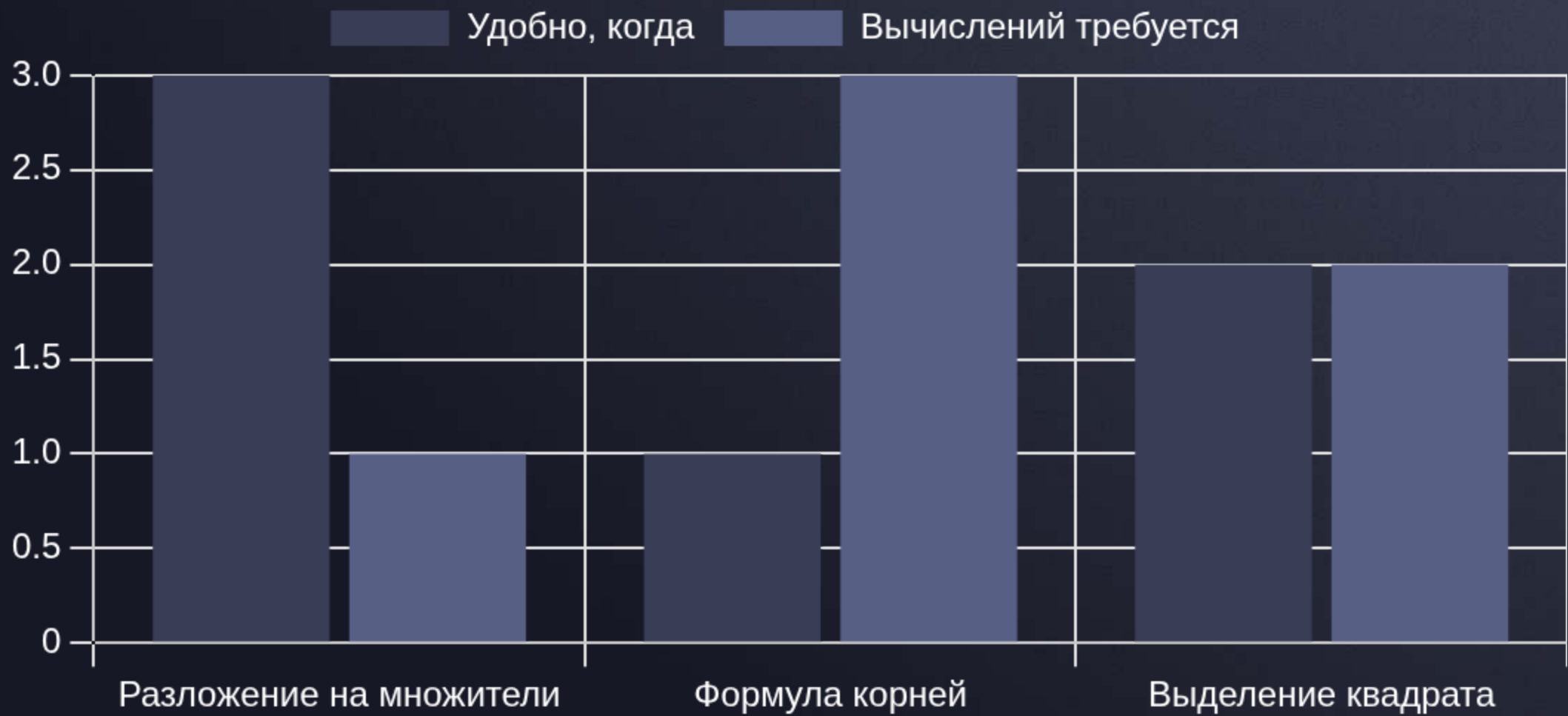
Далее применяют правило нуля произведения: если произведение равно нулю, то хотя бы один множитель равен нулю. Получаем  $x = 2$  или  $x = 3$ , значит уравнение имеет два корня.

03

## Когда способ полезен

Этот приём особенно удобен, когда квадратный трёхчлен легко раскладывается устно или с небольшой проверкой. Тогда решение получается быстрее, чем через длинные вычисления.

# Сравнение способов решения квадратного уравнения



На диаграмме показано, что один и тот же пример можно решать разными путями, но удобство зависит от вида уравнения.

Формула через дискриминант универсальна, однако для простых трёхчленов разложение на множители часто даёт более быстрый ответ.

Сравнительная оценка школьных способов решения квадратных уравнений

# Формула корней через дискриминант



## Сначала считают D

Для уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$  находят дискриминант по формуле  $D = b^2 - 4ac$ . Он помогает заранее понять, сколько действительных корней получится.



## Затем находят корни

Если дискриминант найден, корни вычисляют по формуле  $x = (-b \pm \sqrt{D}) / 2a$ . Важно аккуратно подставлять коэффициенты и соблюдать порядок действий.

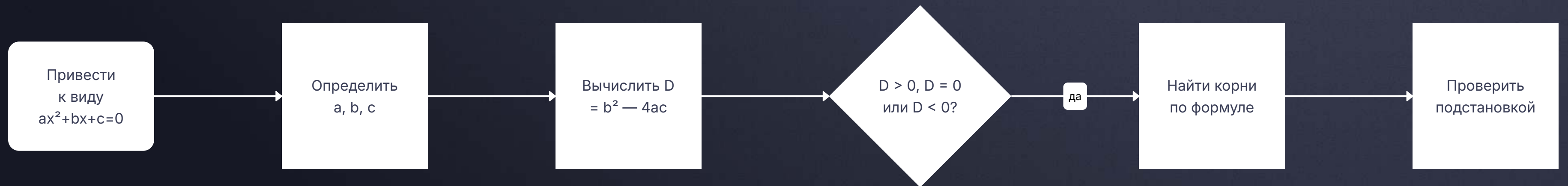


## Зачем нужен этот способ

Формула подходит для любого квадратного уравнения, даже если его трудно разложить на множители. Поэтому её считают самым универсальным способом решения.

# Алгоритм решения квадратного уравнения

Последовательность действий при решении уравнения второй степени



# Пример решения по формуле дискриминанта

01

## Подстановка коэффициентов

В уравнении  $x^2 - 3x - 4 = 0$  коэффициенты равны:  $a = 1$ ,  $b = -3$ ,  $c = -4$ . Их подставляют в формулу дискриминанта и внимательно сохраняют знаки.

02

## Вычисление корней

Получаем  $D = 25$ , значит уравнение имеет два действительных корня. Затем вычисляют  $x_1 = 4$  и  $x_2 = -1$  по формуле корней, не переходя к разложению на множители.

03

## Что показывает пример

Этот пример доказывает, что формула дискриминанта помогает решить уравнение даже тогда, когда подходящее разложение не видно сразу. Главное — аккуратные вычисления и проверка.

# Неполные квадратные уравнения

Если  $c = 0$

Уравнение содержит вид  $ax^2 + bx = 0$ . Его удобно решать вынесением  $x$  за скобки:  $x(ax + b) = 0$ , после чего применяют правило нуля произведения.

Если  $b = 0$

Получается уравнение  $ax^2 + c = 0$ . Сначала находят  $x^2$ , а затем извлекают корень. Такой вид часто требует внимательности со знаком числа  $c$ .

Если  $b = 0$  и  $c = 0$

Остаётся уравнение  $ax^2 = 0$ . В этом случае сразу получаем единственный корень  $x = 0$ , потому что при  $a \neq 0$  нулю равен только сам  $x$ .

# Как значение дискриминанта влияет на число корней



Знак дискриминанта позволяет быстро оценить результат, не находя корни сразу. Это экономит время и помогает выбрать нужный способ решения.

По дискриминанту можно заранее определить число действительных корней: 0, 1 или 2.

# Ключевые связи с параболой



## График уравнения

График функции  $y = ax^2 + bx + c$  имеет форму параболы. По его положению можно понять, будет ли у уравнения вообще действительный корень и сколько их ожидается.



## Точки пересечения

Корни квадратного уравнения — это значения  $x$ , при которых  $y = 0$ . На графике они совпадают с точками пересечения параболы с осью  $Ox$  и показывают решение наглядно.



## Знак дискриминанта

Если  $D > 0$ , парабола пересекает ось  $Ox$  в двух точках; если  $D = 0$ , касается её; если  $D < 0$ , остаётся выше или ниже оси без пересечения.

# Типичные ошибки при решении квадратных уравнений

| Ошибка              | Почему неверно | Правильный ход        |
|---------------------|----------------|-----------------------|
| Знак в D            | Меняет ответ   | Проверять формулу     |
| Забыт коэффициент a | Неверные корни | Подставлять все к     |
| Потерян корень      | Неполный ответ | Проверять оба решения |

Школьная практика решения уравнений

Краткая таблица помогает увидеть самые частые неточности и сразу вспомнить правильный ход решения.

Большинство ошибок связано с вычислениями и невнимательностью, а не со сложностью самой формулы.

# Проверка найденных корней

Пошаговая схема: подстановка в исходное уравнение и сравнение левой и правой частей.



# Где встречаются квадратные уравнения



## Площадь и размеры

Если неизвестна сторона прямоугольника или квадрата, составляют уравнение через площадь. После преобразований часто получается квадратное уравнение, которое связывает числа с геометрией.



## Движение

В задачах на движение появляются расстояние, время и скорость. Когда неизвестная величина входит в произведение или квадрат, уравнение нередко становится квадратным и требует аккуратных вычислений.



## Числовые задачи

Произведение последовательных чисел, сумма с квадратом или выражение через неизвестное число тоже могут привести к уравнению второй степени. Такие задачи показывают, как алгебра описывает реальные ситуации.

# Как выглядит решение в записи

01

## Записать уравнение

Сначала аккуратно выписывают исходное квадратное уравнение и приводят его к стандартному виду, если это ещё не сделано. Это помогает не потерять коэффициенты и порядок действий.

02

## Показать вычисления

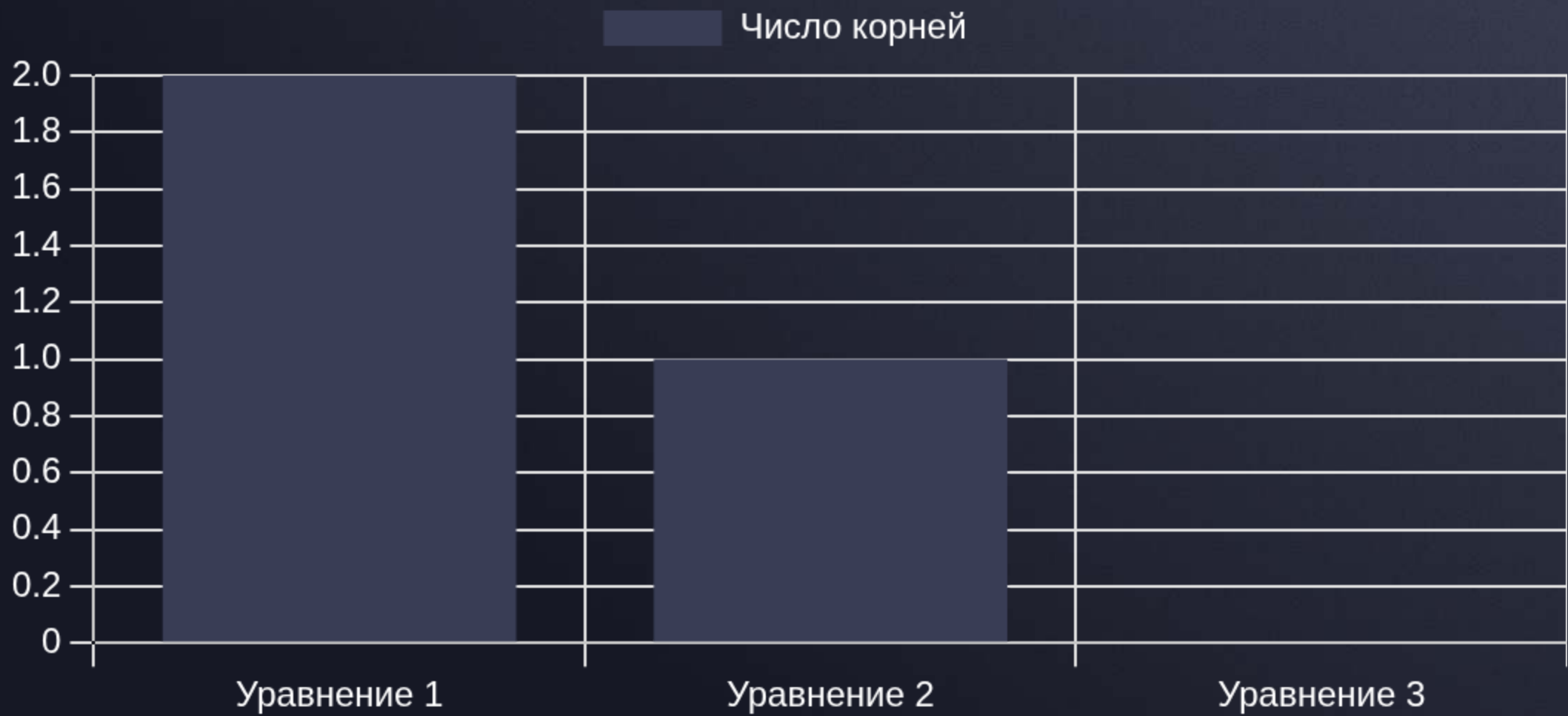
Далее находят дискриминант или выполняют разложение на множители. Все промежуточные шаги записывают последовательно, чтобы было видно, откуда берётся каждый корень.

03

## Оформить ответ

В конце указывают все найденные корни и, если нужно, проверяют их подстановкой. Чёткая итоговая строка делает решение понятным и облегчает проверку учителем.

# Сравнение результатов для трёх уравнений



Даже при одинаковом виде уравнений разные коэффициенты дают разные результаты. Это хорошо видно, когда сравнивают несколько примеров рядом.

Коэффициенты определяют значение дискриминанта, а значит и число действительных корней.

# Связь квадратных уравнений с другими темами алгебры

01

## Преобразование выражений

Чтобы решить уравнение, нужно уметь раскрывать скобки, приводить подобные слагаемые и пользоваться формулами сокращённого умножения. Эти действия являются основой для дальнейшей работы.

02

## Дроби и вычисления

Во многих примерах появляются дробные коэффициенты и корни, поэтому важно уверенно выполнять действия с дробями, знаками и квадратными корнями без лишних ошибок.

03

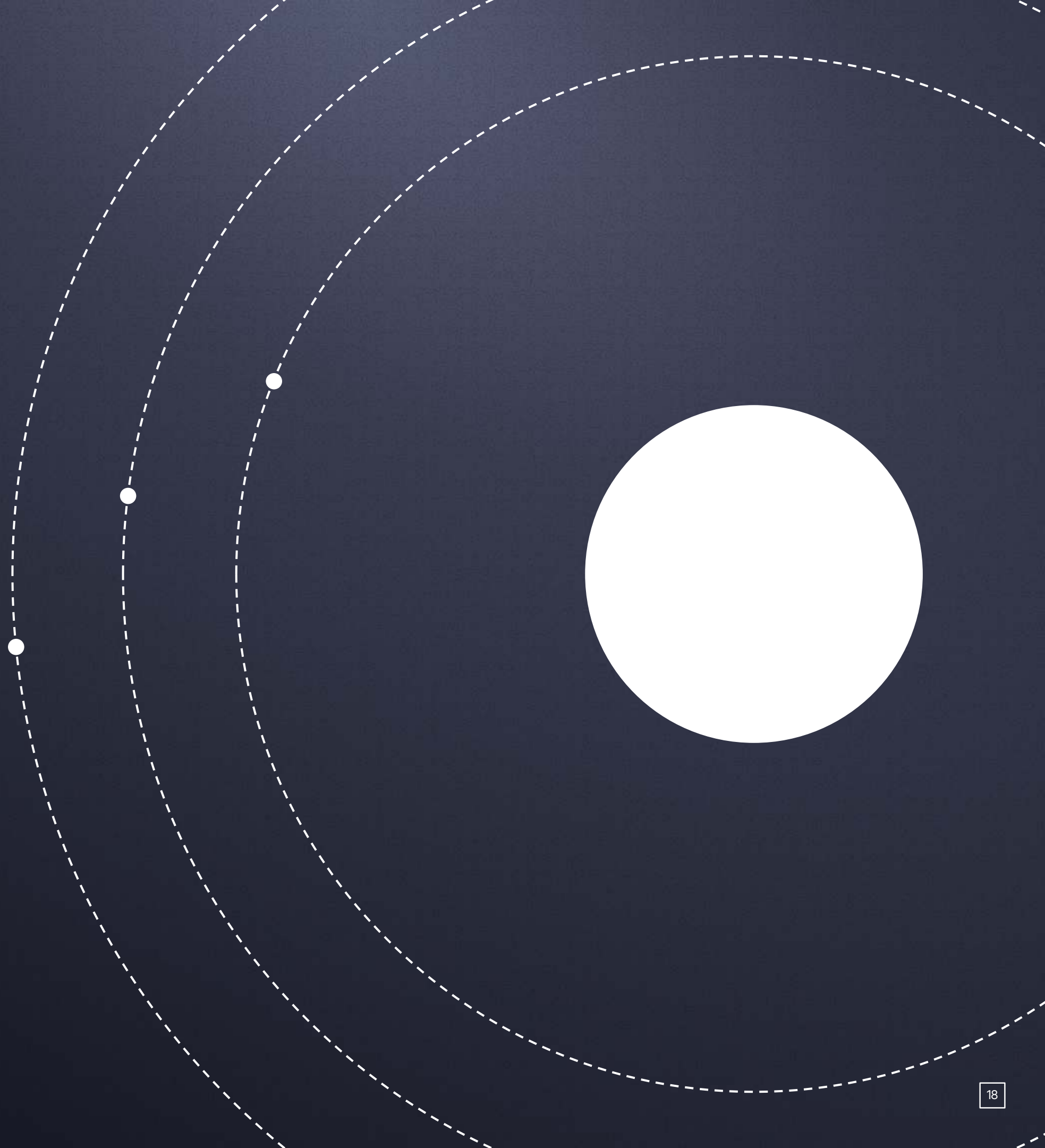
## Функции и графики

Квадратные уравнения помогают понять связь между алгебраической записью и графиком параболы. Это подготавливает к изучению функций, таблиц значений и анализу пересечений с осями.

04

## Геометрия и задачи

В геометрических задачах квадратные уравнения возникают при вычислении площадей и длин сторон. Поэтому тема полезна не только в алгебре, но и при решении практических задач.



# Что нужно запомнить перед самостоятельной работой

## Стандартный вид

Квадратное уравнение записывают как  $ax^2 + bx + c = 0$ , где  $a$  не равно нулю. Если это условие выполнено, уравнение считается квадратным независимо от того, есть ли все члены.

## Смысл дискриминанта

Значение  $D$  заранее показывает, сколько действительных корней будет у уравнения. Это помогает не тратить время на лишние вычисления, когда ответ уже можно предсказать.

## Основные способы

Чаще всего используют разложение на множители и формулу через дискриминант. Первый способ удобен в простых случаях, второй подходит почти всегда и считается универсальным.

## Проверка ответа

После решения полезно подставить найденные корни в исходное уравнение. Такая проверка помогает заметить пропущенный знак, неверный корень или ошибку в вычислениях.

# Квадратные уравнения: важный шаг в алгебре

Квадратные уравнения учат видеть связь между формулами, вычислениями и графиками. Освоив их, ученик получает надёжный инструмент для решения задач и подготовки к новым темам.

