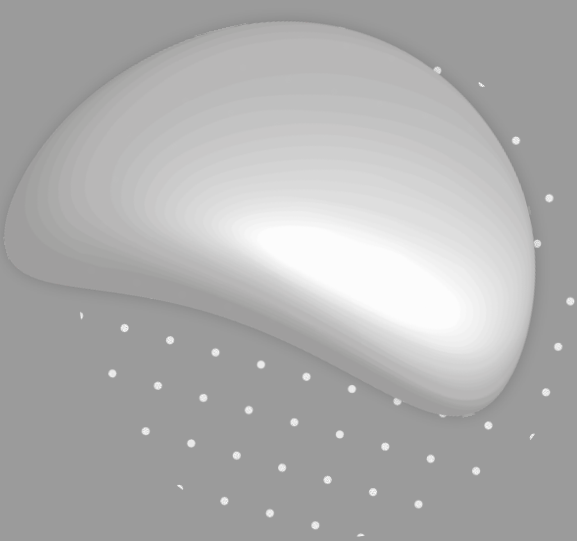




Координаты и векторы: язык положения, формы и движения

Координаты фиксируют место, векторы — движение; дальше всё
сводится к формулам и смысловым образам.



Истоки координатного метода и его место в школьной геометрии

Декартова система координат появилась в XVII веке благодаря Рене Декарту и Пьеру Ферма. Она перевела геометрию в язык чисел и уравнений. В 11 классе это помогает решать задачи на расстояния, середины, прямые и взаимное расположение фигур.



$$|x_2 - x_1|$$

**Модуль разности координат задаёт
расстояние между точками.**

На координатной прямой расстояние между точками
равно модулю разности их координат. Это сразу переводит
«левее—правее» в точное число.

Курс школьной аналитической геометрии (определение расстояния на координатной прямой).

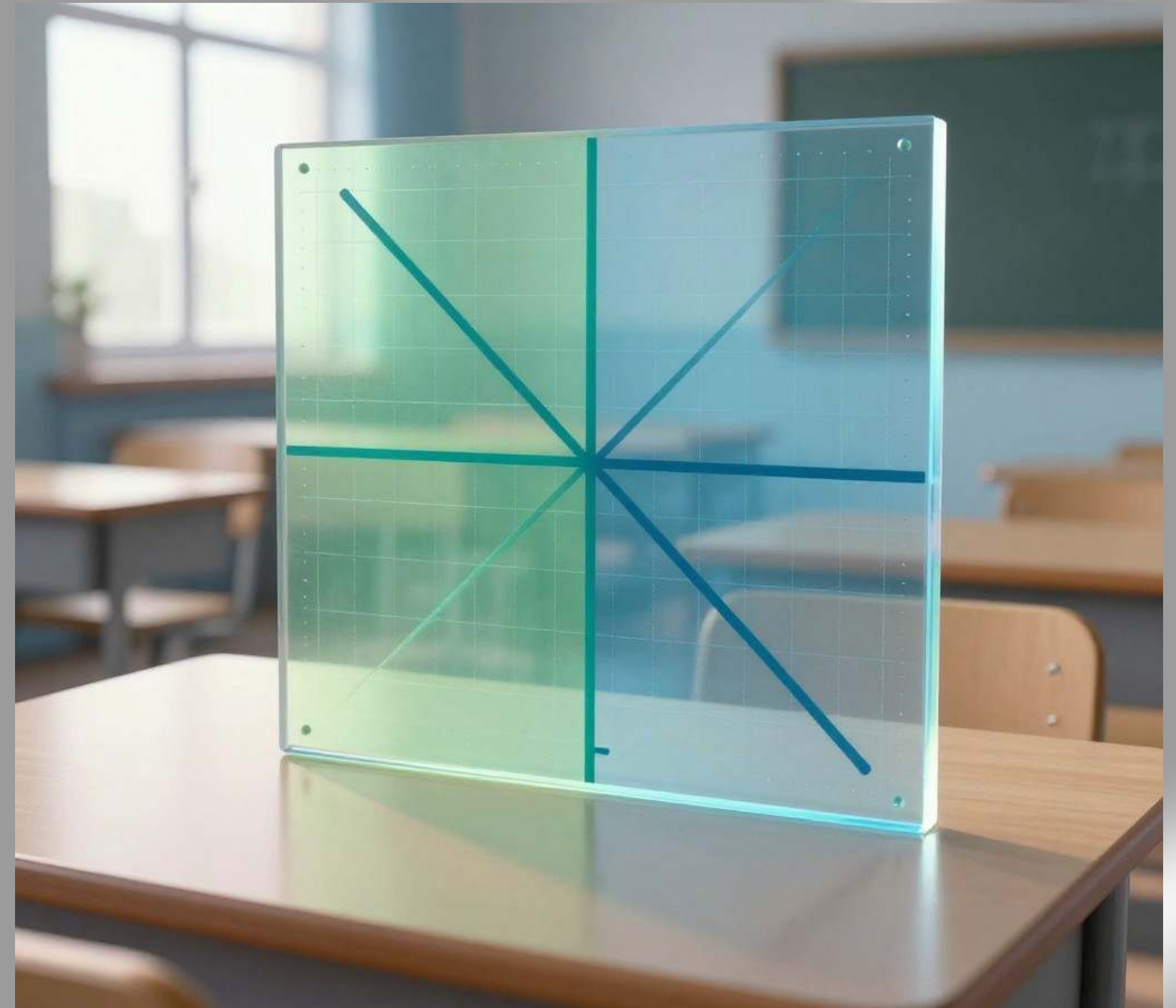
Координатная плоскость и запись точки парой чисел

Точка как упорядоченная пара

Точка на плоскости задаётся упорядоченной парой $(x; y)$, где x — абсцисса, а y — ордината. Ось Ox — ось абсцисс, ось Oy — ось ординат. Каждой паре соответствует ровно одна точка.

Четверти и знаки координат

Плоскость делится на четыре четверти. В I $(+,+)$ обе координаты положительны, во II $(-,+)$ абсцисса отрицательна, а ордината положительна, в III $(-,-)$ обе отрицательны, в IV $(+,-)$ абсцисса положительна, ордината отрицательна. Например, $A(3; -2)$ находится в IV четверти.



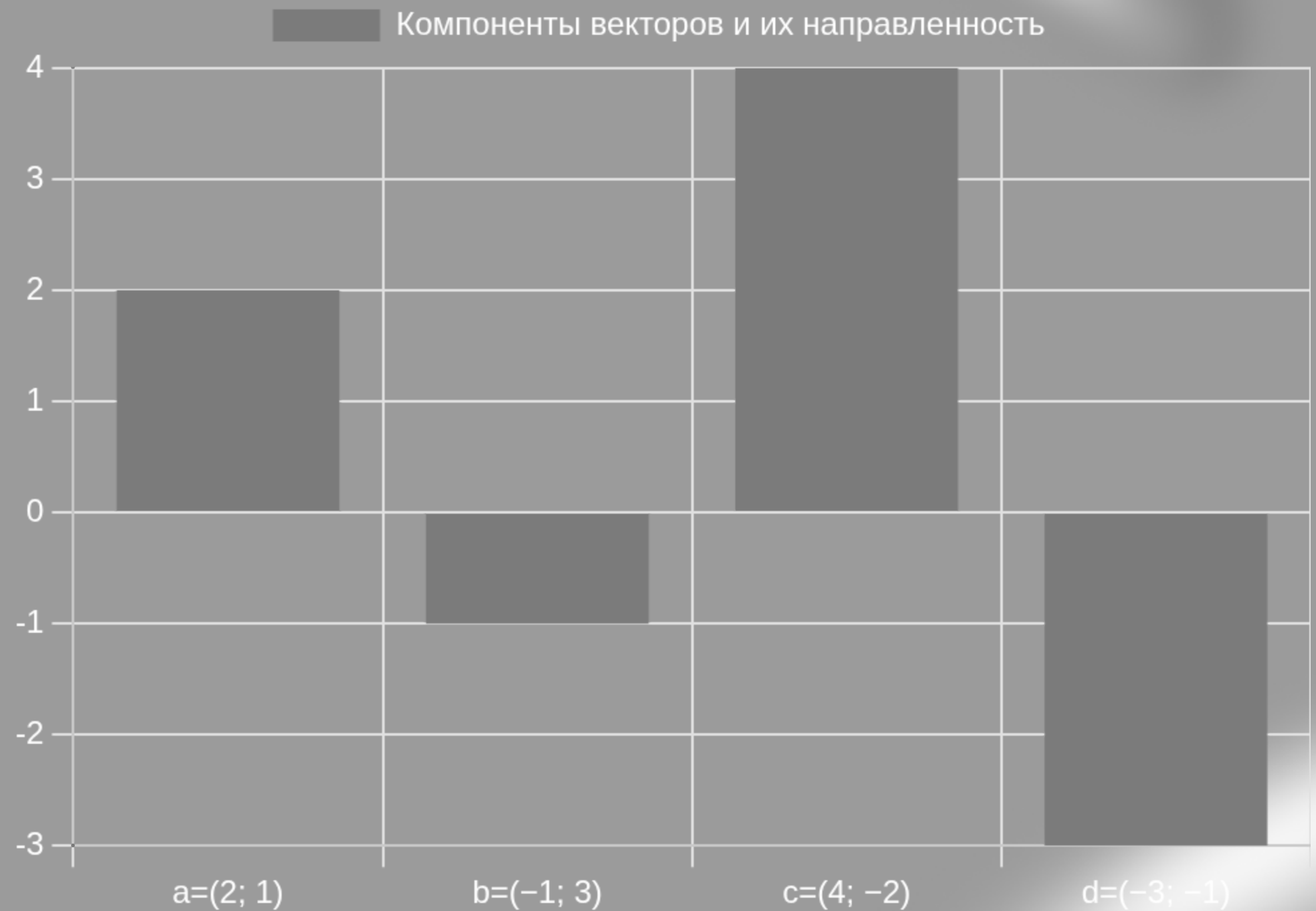
Основные формулы координатной геометрии

Объект	Формула
Расстояние АВ	$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
Середина М	$((x_1+x_2)/2; (y_1+y_2)/2)$
Длина вектора а	$\sqrt{ax^2+ay^2}$
Координаты АВ	$(x_2-x_1; y_2-y_1)$

- Базовые вычисления для точек, середины и векторов — основа дальнейших задач. Главное правило: подставляйте координаты аккуратно.
- Большинство задач сводится к выбору нужной формулы и последовательной подстановке координат без лишних построений.

Координаты векторов как пары компонент

- По знакам компонент видно, в какую сторону направлены перемещения: положительные «вправо/вверх», отрицательные — «влево/вниз».
- Чем больше модуль компоненты по конкретной оси, тем заметнее соответствующее направление вектора.



Обучающий пример с заданными векторами $a=(2;1)$, $b=(-1;3)$, $c=(4;-2)$, $d=(-3;-1)$.

Свободный вектор, равенство и противоположные векторы

1



Вектор определяется не местом начала на рисунке, а длиной, направлением и ориентацией. Поэтому два вектора, лежащие в разных частях плоскости, могут быть одинаковыми по смыслу.

2



Равные векторы имеют одинаковые координаты компонент: одинаковые значения по x и по y , а значит — одинаковую длину и направление. Нулевой вектор имеет длину 0 и совпадающие начало и конец.

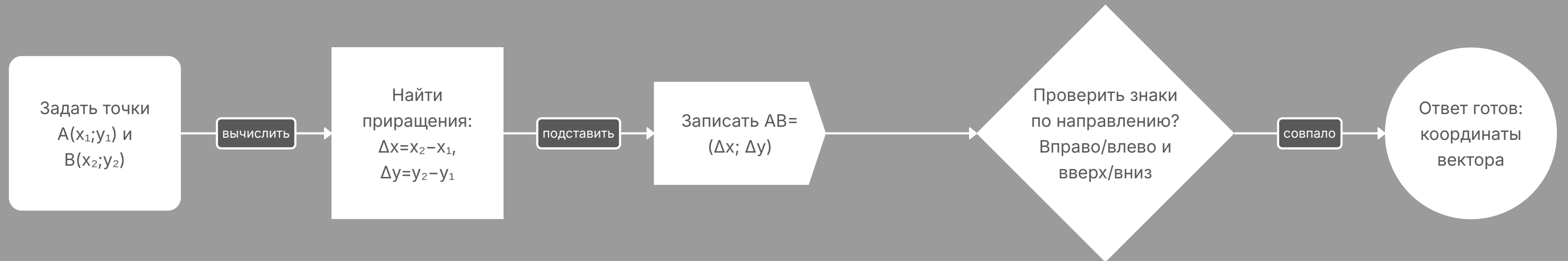
3



Противоположные векторы равны по модулю, но направлены в разные стороны. Их координаты отличаются только знаками: компоненты одной оси меняют знак одновременно.

Как находят координаты вектора по двум точкам

Алгоритм из координатной формулы $AB=(x_2-x_1; y_2-y_1)$ и проверки знаков направлений.



Сложение векторов: правило треугольника и правило параллелограмма

- 1 Сумма векторов строится геометрически: по правилу параллелограмма диагональ результирующего параллелограмма даёт вектор суммы; по правилу треугольника — третий вектор замыкает ломаную. На координатной плоскости это становится покомпонентным действием.
- 2 В координатной форме сложение выполняется так: $(a_x; a_y) + (b_x; b_y) = (a_x + b_x; a_y + b_y)$. Например, $(2; 1) + (-1; 3) = (1; 4)$. Геометрический смысл подтверждает получившаяся диагональ.

Вычитание векторов и связь с противоположным вектором

10

1

Разность $a - b$ удобно понимать как сложение a с противоположным вектором: $a - b = a + (-b)$. Поэтому сначала заменяют b на вектор с теми же координатами по модулю, но с противоположным направлением.

2

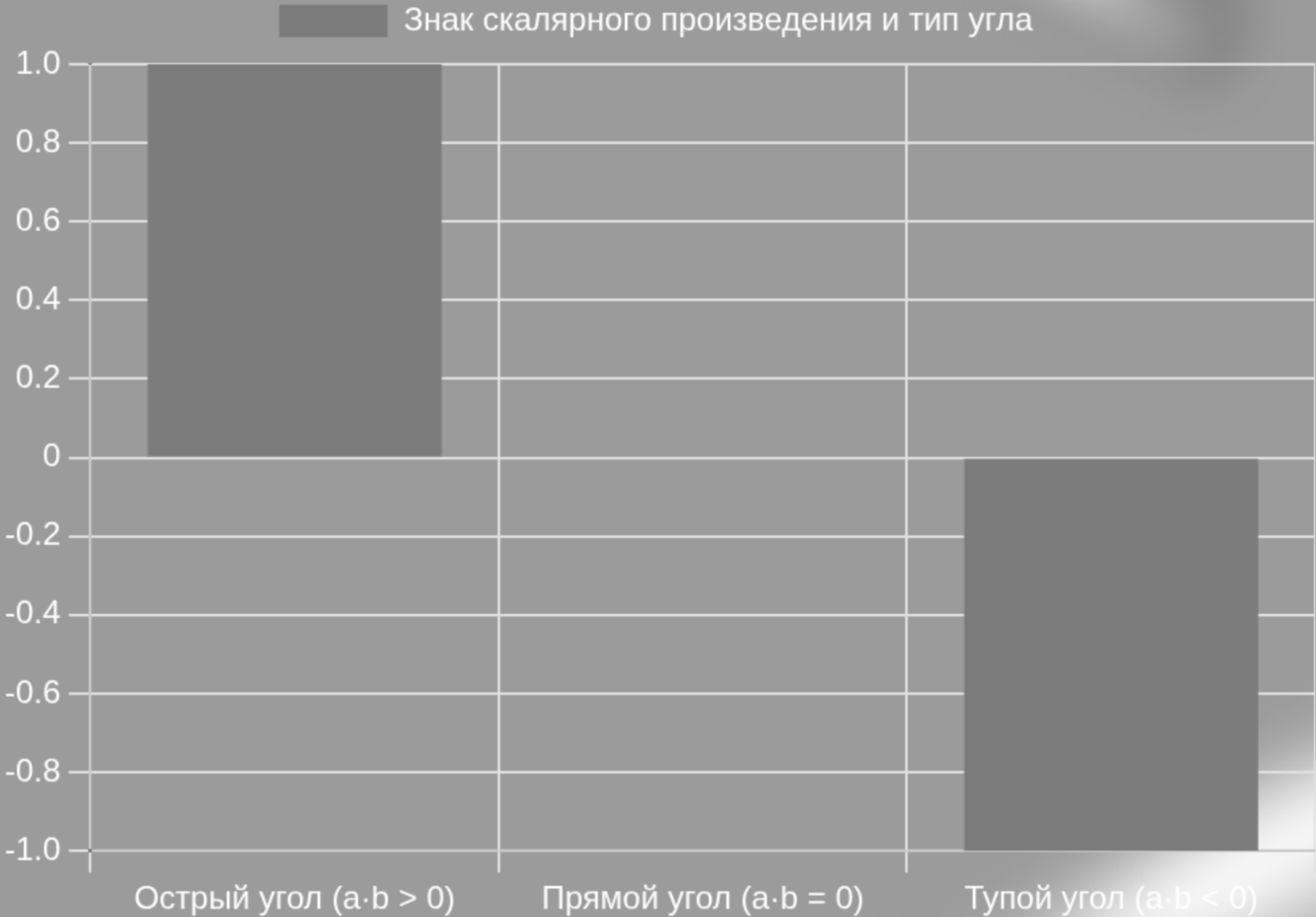
Для противоположного вектора координаты меняют знак: $(a_x; a_y) \rightarrow (-a_x; -a_y)$. Тогда формула вычитания записывается напрямую: $(a_x; a_y) - (b_x; b_y) = (a_x - b_x; a_y - b_y)$.

3

Геометрически разность показывает вектор, который начинается в конце b и приходит в конец a . Такой смысл особенно полезен при описании смещений и поиске направления «как перейти от одной позиции к другой».

Скалярное произведение и угол между векторами

- По формуле $a \cdot b = axbx + ayby$ сравнивают знак результата: он напрямую соответствует характеру угла между векторами и облегчает решение без построений.
- Если скалярное произведение нулевое, угол прямой; положительные и отрицательные значения различают острый и тупой случаи, связывая алгебру с геометрией.



Прямая в координатах: направляющий и нормальный подходы

12



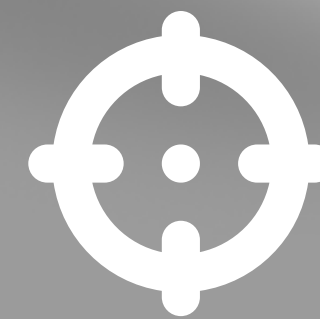
Точка и направляющий вектор

Прямая можно задавать точкой и направляющим вектором: достаточно указать, в какую сторону она «тянется». Такой способ удобен для задач на параллельность и построения по направлению.



Общее уравнение $Ax + By + C = 0$

Запись $Ax + By + C = 0$ — компактная форма. В ней сразу «зашиты» направление и наклон, а решать задачи часто проще подстановкой координат, чем рисунком.



Нормаль $(A; B)$ и угол наклона

Вектор $(A; B)$ является нормалью к прямой, то есть перпендикулярен ей. Коэффициент наклона к оси Ox (если он определён) помогает судить о взаимном расположении прямых.

Типовые координатные задачи 11 класса

- Ключевые задачи сводятся к применению координатных формул: от середины и расстояния до векторов и перпендикулярности.
- Один набор координатных формул последовательно закрывает целые группы задач: средние величины, измерения, операции с векторами и проверку углов.

Тип задачи	Формула/результат
Середина отрезка	$M((x_1+x_2)/2; (y_1+y_2)/2)$
Расстояние между точками	$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
Координаты вектора	$AB=(x_2-x_1; y_2-y_1)$
Сложение/вычитание	$(ax;ay)\pm(bx;by)=(ax\pm bx; ay\pm by)$
Длина вектора	$ a =\sqrt{ax^2+ay^2}$
Перпендикулярность	$a\cdot b=axbx+ayby=0$

Координаты и векторы в физике, навигации и компьютерной графике

14



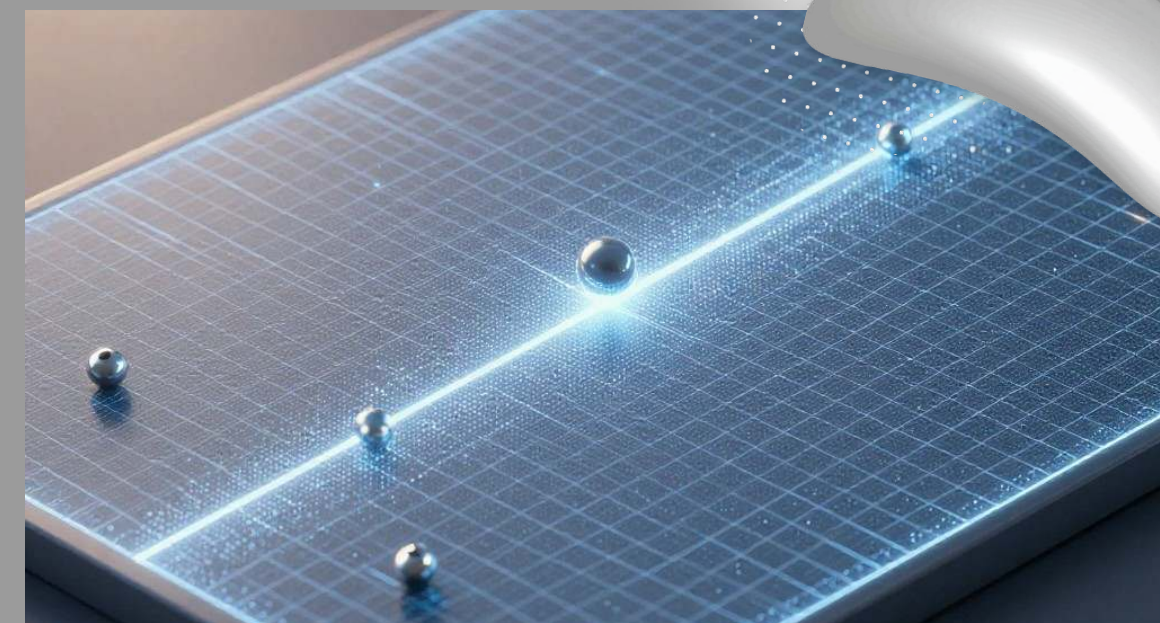
Разгон как «управляемое» направление

В физике перемещение тела описывают вектором: важны и величина, и направление. Скорость и ускорение тоже являются векторами, поэтому изменение траектории удобно отслеживать по компонентам, как по двум «осям смысла».



Навигатор: карта и смещение между точками

В навигации координаты фиксируют положение объекта на карте. А вектор перемещения показывает, как именно он сместился между двумя точками маршрута. Благодаря этому маршрут можно сравнивать и вычислять пройденное расстояние и повороты.



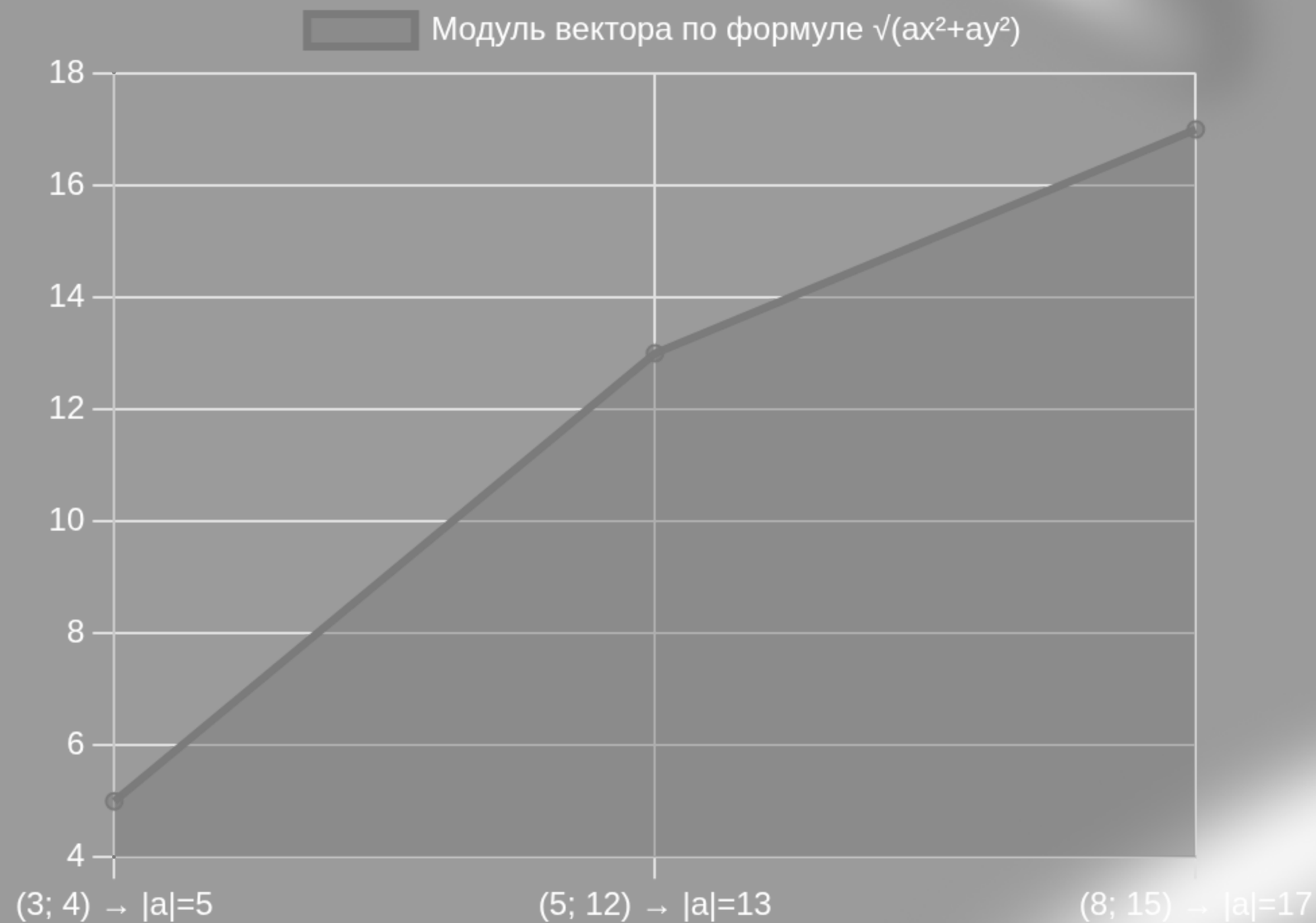
Экран как координатная плоскость

В компьютерной графике координаты задают положение пикселей, вершин и объектов на плоскости экрана. Вектор помогает описывать перемещения, повороты и направление движения: так «рисунок» превращается в точные расчёты без неопределённости.

Как длина вектора зависит от его координат

15

- Здесь действует формула $|a| = \sqrt{ax^2 + ay^2}$: поэтому модуль растёт из-за суммы квадратов, а не пропорционален каждой компоненте по отдельности.
- Во всех примерах увеличение хотя бы одной компоненты увеличивает модуль, но быстрее, чем «линейная» интуиция подсказывает: решающим становится корень из суммы квадратов.



Проверка на примерах (3;4), (5;12), (8;15) из учебного материала; дата не требуется.

Алгоритм решения задач на координаты и векторы

Пять шагов помогают стабильно получать верные формулы и аккуратно выполнять вычисления.

16



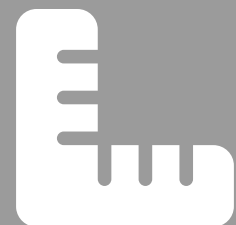
Типичные ошибки при работе с координатами и векторами

17



Путаница знаков

Часто теряются «минусы» при определении четверти или при вычислении разностей координат. В итоге направление вектора разворачивается, а формула расстояния даёт неожиданный результат.



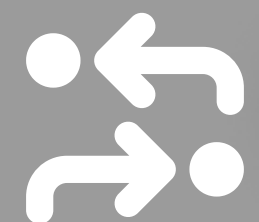
Неверная формула расстояния

Ошибка возникает, когда вместо квадратов разности подставляют модуль по координатам или забывают корень. Тогда длина выходит слишком малой или слишком большой по сравнению с ожидаемой.



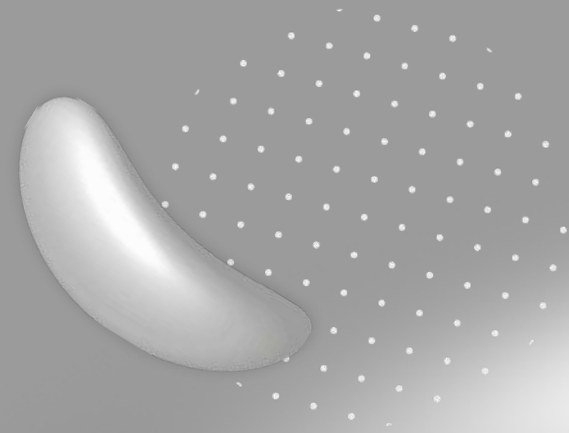
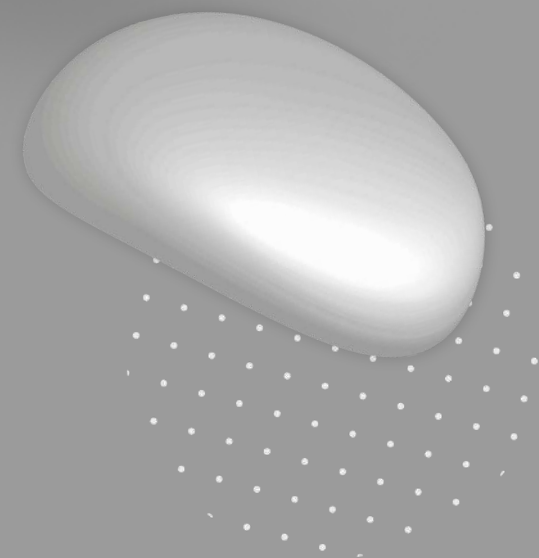
Смещение точки и вектора

Координаты точки и координаты вектора похожи по записи, но смысл разный: вектор описывается разностью координат. Перепутывание приводит к неверному знаку при сложении и вычитании.



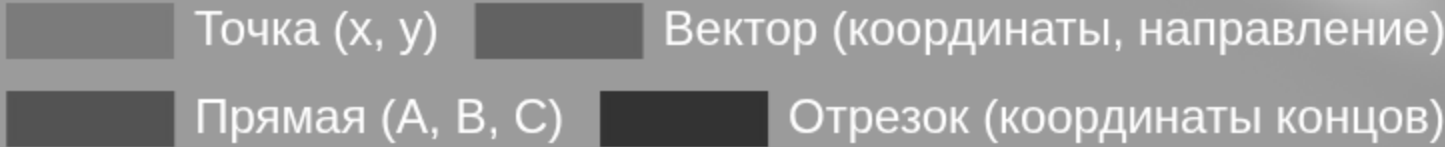
Ошибки порядка при вычитании АВ

При нахождении АВ важно соблюдать порядок: $AB = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$. Если перепутать, получится вектор, противоположный исходному, что особенно заметно при задачах на смещения и направления.



Сравнение способов задания геометрических объектов

- Объекты различаются набором параметров: точка задаётся двумя координатами, прямая — тройкой чисел A, B, C , а отрезок — координатами концов.
- Диаграмма подчёркивает общий принцип: независимо от фигуры всё можно перевести в координатную запись и дальше решать задачи вычислительно, а не только по рисунку.



Обобщение школьных способов задания объектов в координатной геометрии (без внешних источников).

Продолжение темы в следующих разделах геометрии

19

Окружность и её уравнение

Уравнение окружности переводит геометрию в вычисления: точки проверяются подстановкой, а свойства фигур доказываются через алгебру, а не через дополнительные построения.

Уравнение прямой

Координатный язык позволяет изучать прямые через их уравнения и направления: удобно исследовать параллельность и перпендикулярность, а также решать задачи на пересечение.

Расстояние до прямой и векторные доказательства

Формулы расстояния от точки до прямой и подходы с векторами делают доказательства более строгими. Координаты обеспечивают точный численный ответ даже при сложных чертежах.

Координаты и векторы — универсальный инструмент геометрии

Координаты задают положение точки, а векторы — направление и величину перемещения. Формулы расстояния, середины, длины, сложения, вычитания и скалярного произведения превращают геометрию в точные расчёты. Это база аналитической геометрии и опора в математике, физике, навигации и графике.