

Многочлены в алгебре: как записывать и преобразовывать выражения

Многочлены: от записи выражений к удобным преобразованиям





Зачем изучать многочлены

Многочлены позволяют записывать длинные выражения короче и аккуратнее. Они помогают считать площади, периметры и стоимость, а также описывать зависимости от переменной в задачах 7 класса.

Основные виды многочленов

Вид многочлена определяется числом его членов.

Чем больше членов, тем сложнее запись, но вид многочлена всегда можно определить по их числу.

Вид	Пример	Членов	Особенность
Одночлен	$7x^3$	1	Один член
Двучлен	$x+5$	2	Два слагаемых
Трёхчлен	x^2-3x+2	3	Три слагаемых
Многочлен	$2a^4-a^2+4a-1$	4	Несколько слагаемых

Школьное определение многочлена и примеры из учебного курса алгебры 7 класса.

Что называют многочленом

Состав выражения

Многочлен — это сумма или разность одного или нескольких одночленов, соединённых знаками «+» и «-». Такое представление делает запись выражений короче и удобнее для преобразований.

Одна или несколько переменных

В многочленах встречаются одночлены с одной переменной и с несколькими переменными. Это позволяет записывать более разные математические зависимости, не усложняя саму форму выражения.

Из чего состоит член

Каждый член многочлена обычно содержит числовой коэффициент, буквенную часть и степень. Эти элементы помогают быстро понять, как устроено выражение и какие действия с ним возможны.

Нулевой коэффициент

Если коэффициент равен нулю, такой член не влияет на значение многочлена и не записывается. Поэтому в выражении остаются только те части, которые действительно нужны.

Коэффициент, переменная и степень члена

01 Коэффициент

Коэффициент — это числовая часть одночлена. В записи $5x^2$ коэффициент равен 5, а именно он показывает, сколько таких одинаковых буквенных частей входит в член.

02 Переменная

Переменная — это буква, значение которой может меняться. Чаще всего используют x , a , b , y . Именно переменная делает выражение зависимым от выбранного числа.

03 Степень одночлена

Степень одночлена равна сумме показателей степеней всех букв. Например, в $3x^2y$ степень равна 3, а в $4a^3b^2$ степень равна 5.

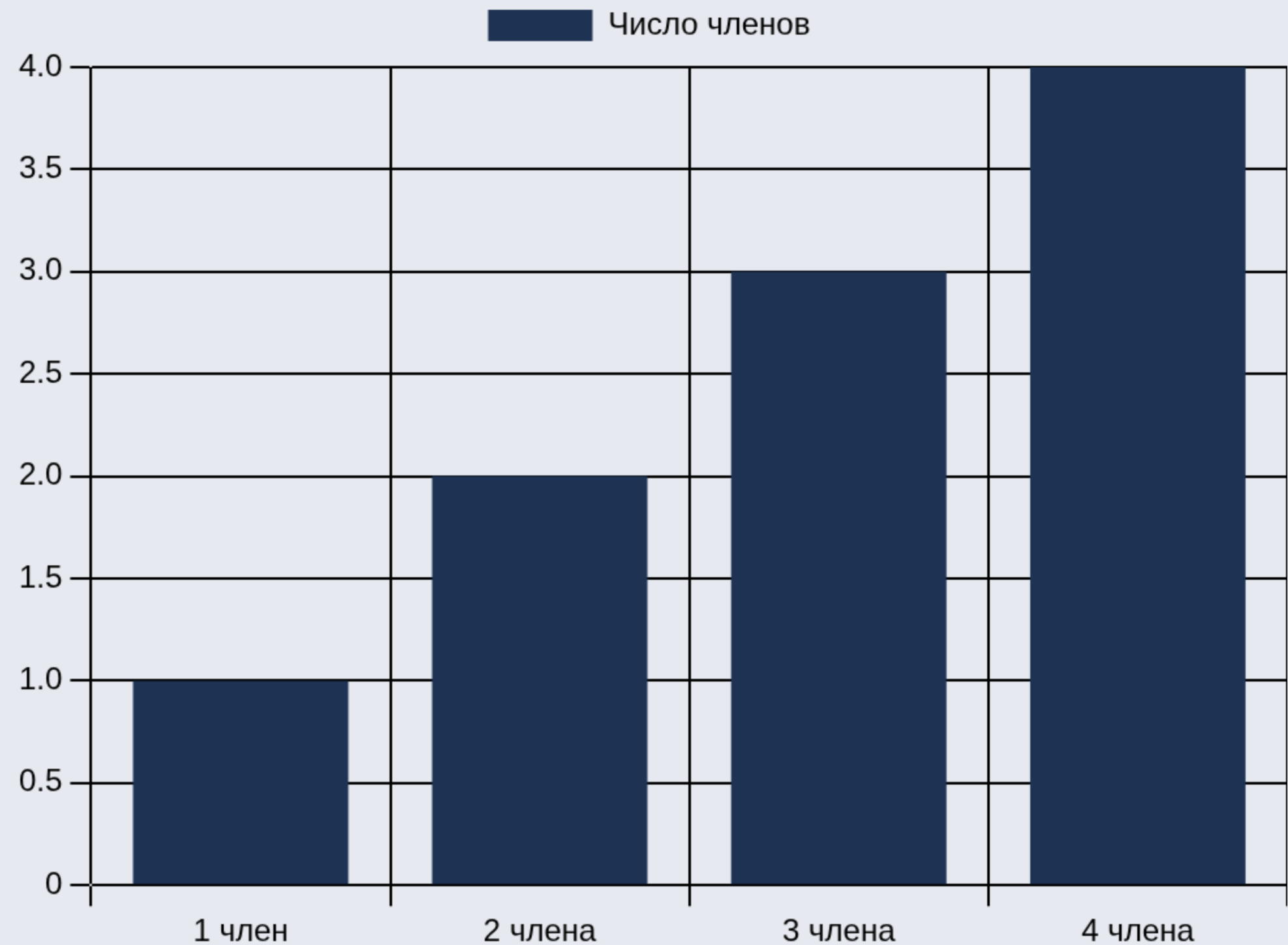
04 Число без букв

У числа без букв степень считают равной 0. Это удобно помнить, когда нужно сравнивать члены многочлена и определять его общую степень.

Сколько членов бывает в многочленах

На диаграмме видно, что число членов легко определить по записи, даже если степени у них разные.

Чем больше членов, тем длиннее выражение, но его структура остаётся понятной по количеству слагаемых.



Примеры многочленов из школьного курса алгебры.

3

— это степень многочлена $4x^3 - 2x + 9$, потому что наибольшая степень у его члена $4x^3$.

Степень показывает самый «старший» член многочлена после приведения подобных. Если в записи только числа, степень считают равной нулю.

Определение степени многочлена из школьного курса алгебры.

Подобные члены и их приведение

1 Как их узнать

Подобные члены имеют одинаковую буквенную часть и одинаковые степени букв. Поэтому $3x$ и $-5x$ — подобные, а $2a^2$ и $7a^2$ тоже относятся к одной группе.

Что делают с коэффициентами

2

При приведении подобных членов изменяют только коэффициенты: их складывают или вычитают. Буквенная часть при этом остаётся без изменений, поэтому запись становится короче.

3

Простые примеры

Из $3x - 5x$ получается $-2x$, а из $2a^2 + 7a^2$ — $9a^2$. Такие преобразования часто встречаются перед дальнейшим упрощением выражений.

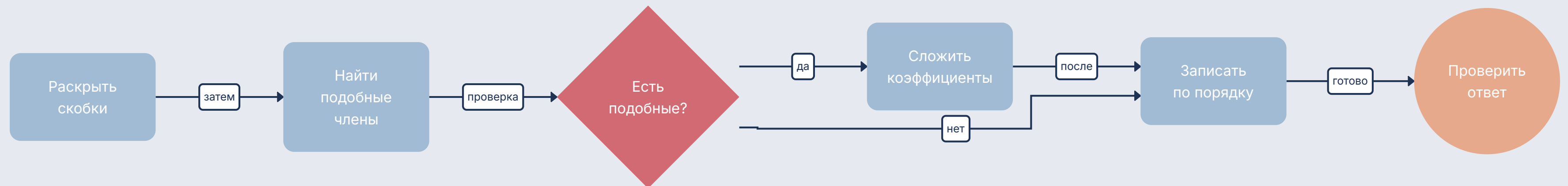
Зачем это нужно

4

Приведение подобных членов помогает увидеть, сколько одинаковых слагаемых осталось в многочлене, и подготовить выражение к сложению, вычитанию или умножению.

Как упрощать многочлен

Последовательность действий при преобразовании выражения



Сложение и вычитание многочленов

+ Сложение

При сложении многочленов объединяют только подобные члены. Коэффициенты складывают, а буквенную часть оставляют без изменений, поэтому выражение становится короче и удобнее для дальнейших вычислений.

✓ Проверка результата

Полезно сравнить полученный ответ с исходными выражениями и убедиться, что все подобные члены учтены. Такая проверка помогает заметить ошибки в знаках и в коэффициентах.

— Вычитание

При вычитании нужно изменить знаки у всех членов вычитаемого. После этого задача сводится к сложению подобных членов, что помогает не потерять ни один знак в записи.

Умножение одночлена на многочлен

01 Распределительный закон

Одночлен умножают на каждый член многочлена отдельно. Это и есть распределительный закон: множитель как бы «распределяется» по всем слагаемым внутри скобок, не пропуская ни одного члена.

02 Умножение коэффициентов

Сначала перемножают числовые коэффициенты, а затем буквенные части. Например, в выражении $3x(x-2)$ коэффициент 3 умножается на 1 и на -2 , поэтому получаем $3x^2-6x$.

03 Степени букв складываются

Если при умножении встречаются одинаковые буквы, их показатели степеней складываются. Так, $x \cdot x = x^2$, а $x \cdot x \cdot x = x^3$. Это правило помогает быстро записывать результат без лишних действий.

04 Практика раскрытия скобок

Такой способ часто используют при раскрытии скобок и упрощении выражений. Он позволяет переходить от записи с множителем перед скобками к более удобному многочлену для дальнейших преобразований.

Умножение многочлена на многочлен



Каждый с каждым

При умножении каждый член первого многочлена умножают на каждый член второго. Нельзя пропустить ни одно произведение: именно из них складывается полный ответ.



Простой пример

Например, $(x+2)(x+3)=x^2+3x+2x+6$, а после приведения подобных членов получается x^2+5x+6 . Здесь видно, как промежуточные шаги превращаются в компактный результат.



Затем приводят подобные

После выполнения всех произведений полученные одночлены записывают вместе и приводят подобные члены. Это помогает сократить длинную запись и получить более простой многочлен.



Нужны порядок и аккуратность

Если в каждом многочлене больше двух членов, промежуточных произведений становится намного больше. Поэтому особенно важны внимательность, последовательность действий и проверка каждого шага.

Формулы сокращённого умножения

1 Квадрат суммы

Формула $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ помогает быстро раскрывать квадрат суммы. Она особенно удобна, когда нужно не перемножать все скобки вручную, а сразу записать готовый результат.

2 Квадрат разности

Формула $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ похожа на предыдущую, но средний член имеет знак минус. Она показывает, что крайние члены остаются положительными, а меняется только знак перед $2ab$.

3 Разность квадратов

Формула $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ позволяет перемножать выражения с одинаковыми членами и разными знаками. Это один из самых полезных приёмов для быстрого вычисления и упрощения.

4 Примеры применения

По формулам можно сразу получить $(x+4)^2=x^2+8x+16$ и $(y-5)(y+5)=y^2-25$. Такие записи короче обычного перемножения и помогают избежать лишних ошибок.

5 Зачем их запоминать

Эти формулы часто встречаются в алгебре и упрощают многие задания. Если узнать выражение по виду, можно выбрать короткий способ решения и сэкономить время на вычислениях.

Геометрический смысл многочленов

Площадь прямоугольника

Если стороны прямоугольника равны x и $x+3$, то его площадь находится как произведение сторон: $x(x+3)=x^2+3x$. Так многочлен выражает реальную геометрическую величину.

Связь с чертежом

На рисунке часто можно увидеть отдельные части с подписями x^2 и $3x$. Такой способ помогает понять, откуда берутся слагаемые и как они связаны с размерами фигуры.

Составные фигуры

Сложные фигуры удобно разбивать на несколько прямоугольников. Тогда площадь всей фигуры записывают как сумму площадей частей, а итоговое выражение получает вид многочлена.



Разложение многочлена на множители

01 **Идея разложения**

Разложение на множители превращает сумму или разность в произведение. Это удобно, потому что произведение часто легче использовать для вычислений, упрощения выражений и решения уравнений.

02 **Общий множитель**

Если все члены имеют общий множитель, его выносят за скобки. Например, $6x+9=3(2x+3)$, а $ax+ay=a(x+y)$. Такой приём быстро сокращает запись.

03 **Группировка членов**

Иногда члены объединяют в группы, чтобы увидеть общий множитель внутри каждой части. Этот способ полезен, когда выражение не раскладывается сразу, но в нём есть скрытая структура.

04 **Формулы и результат**

Некоторые многочлены раскладываются с помощью формул сокращённого умножения: $x^2-9=(x-3)(x+3)$. Такое преобразование помогает заметить удобную форму записи и облегчает дальнейшие вычисления.

Способы преобразования многочленов

Способ	Когда используют	Пример
Приведение подобных	Одинаковые члены	$4x+2x=6x$
Общий множитель	Есть общий множитель	$8y+12=4(2y+3)$
Формула	Подходит известная формула	$x^2-16=(x-4)(x+4)$

В таблице показано, как выбрать подходящий способ преобразования в зависимости от вида выражения.

Способ выбирают по структуре выражения: сначала ищут одинаковые члены и общий множитель, а затем проверяют, не подходит ли формула сокращённого умножения.

Частые ошибки при работе с многочленами

1 Путают коэффициенты и степени

Иногда ученики складывают не коэффициенты, а степени, и получают неверный ответ. В выражении $2x+3x$ правильный результат — $5x$, потому что складываются только числа перед буквами.

2 Теряют знак при скобках

Особенно осторожно нужно раскрывать скобки после знака минус. Если знак перед скобками меняется, то меняются и знаки всех членов внутри, иначе ответ получится неверным.

3 Смешивают неподобные члены

Подобные члены должны иметь одинаковую буквенную часть и одинаковые показатели степеней. Если это условие нарушено, складывать такие члены нельзя, даже если буквы похожи.

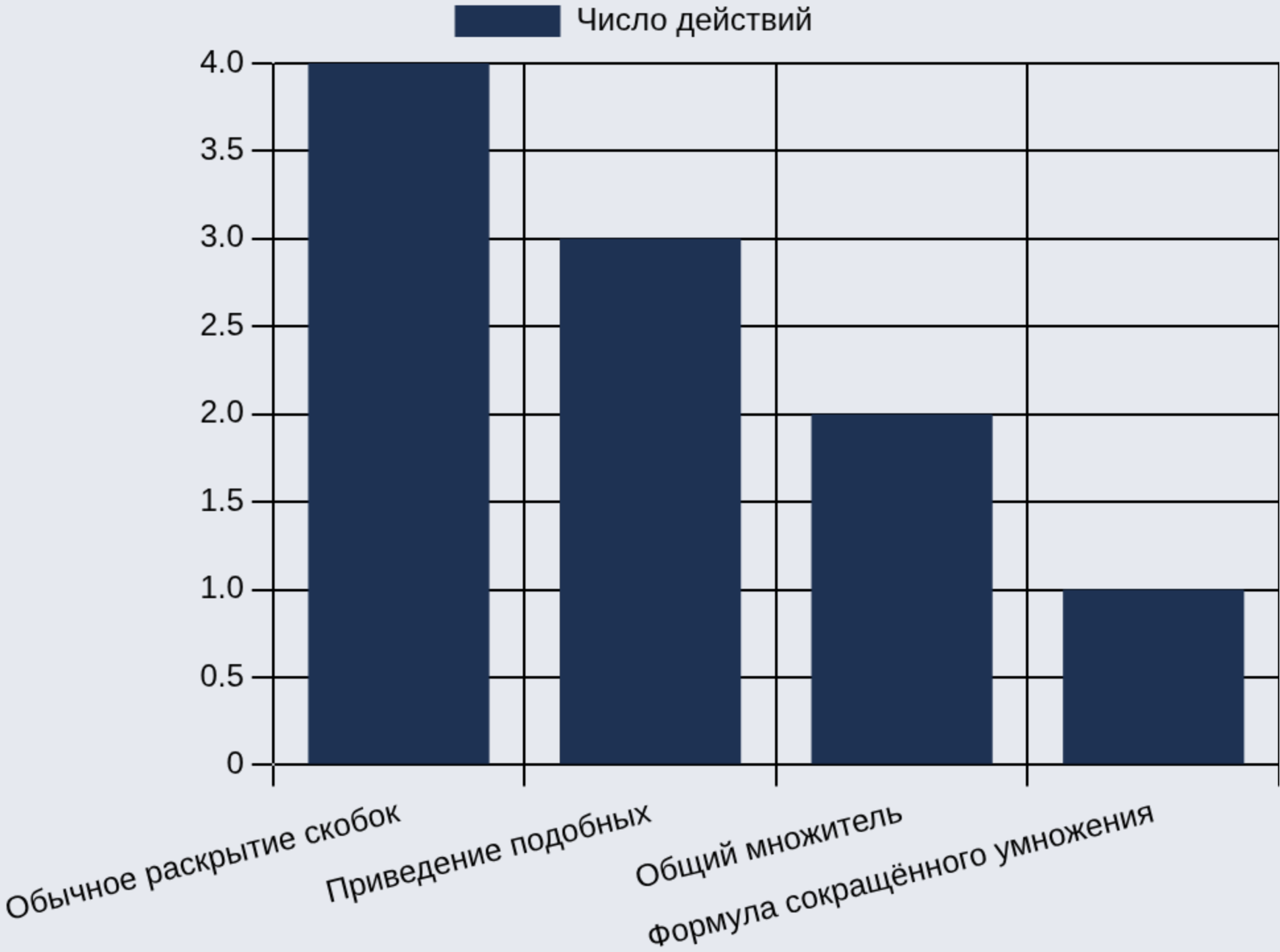
Не проверяют ответ

4 Полезно проверить преобразование обратным действием: раскрыть скобки или подставить значение переменной. Такая проверка помогает заметить пропущенный знак, ошибку в коэффициенте или лишний член.

Какие способы преобразования обычно короче

На одном и том же выражении можно получить одинаковый ответ разными путями. Короткий способ не всегда самый очевидный, но он экономит время и уменьшает риск ошибки.

Чем лучше распознан вид выражения, тем меньше действий нужно выполнить. Самые короткие способы обычно требуют знания правил, а не большого числа промежуточных вычислений.



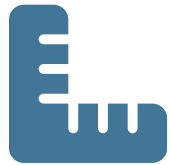
Сравнительная схема для учебного примера

Многочлены в реальных задачах



Стоимость покупок

Многочлены удобно описывают цену нескольких одинаковых товаров. Например, 3 тетради по x рублей и обложка за 20 рублей записываются как $3x+20$.



Геометрия фигур

При нахождении площади прямоугольников и составных фигур многочлены позволяют записать сумму частей компактно. Это делает чертёж и вычисления понятными и аккуратными.



Объём и размеры

В задачах на объём и размеры многочлены помогают выразить зависимость величины от длины, ширины или высоты. Так легче увидеть, как меняется результат.



Изменение величины

В простых моделях роста многочлен может показать, как значение меняется при изменении переменной. Такая запись удобна для сравнения вариантов и быстрого расчёта.

Многочлены: кратко о главном

Многочлены помогают записывать выражения удобно и понятно, а умение преобразовывать их нужно почти в каждой теме алгебры. Чем увереннее ты работаешь с ними, тем проще решать задачи.