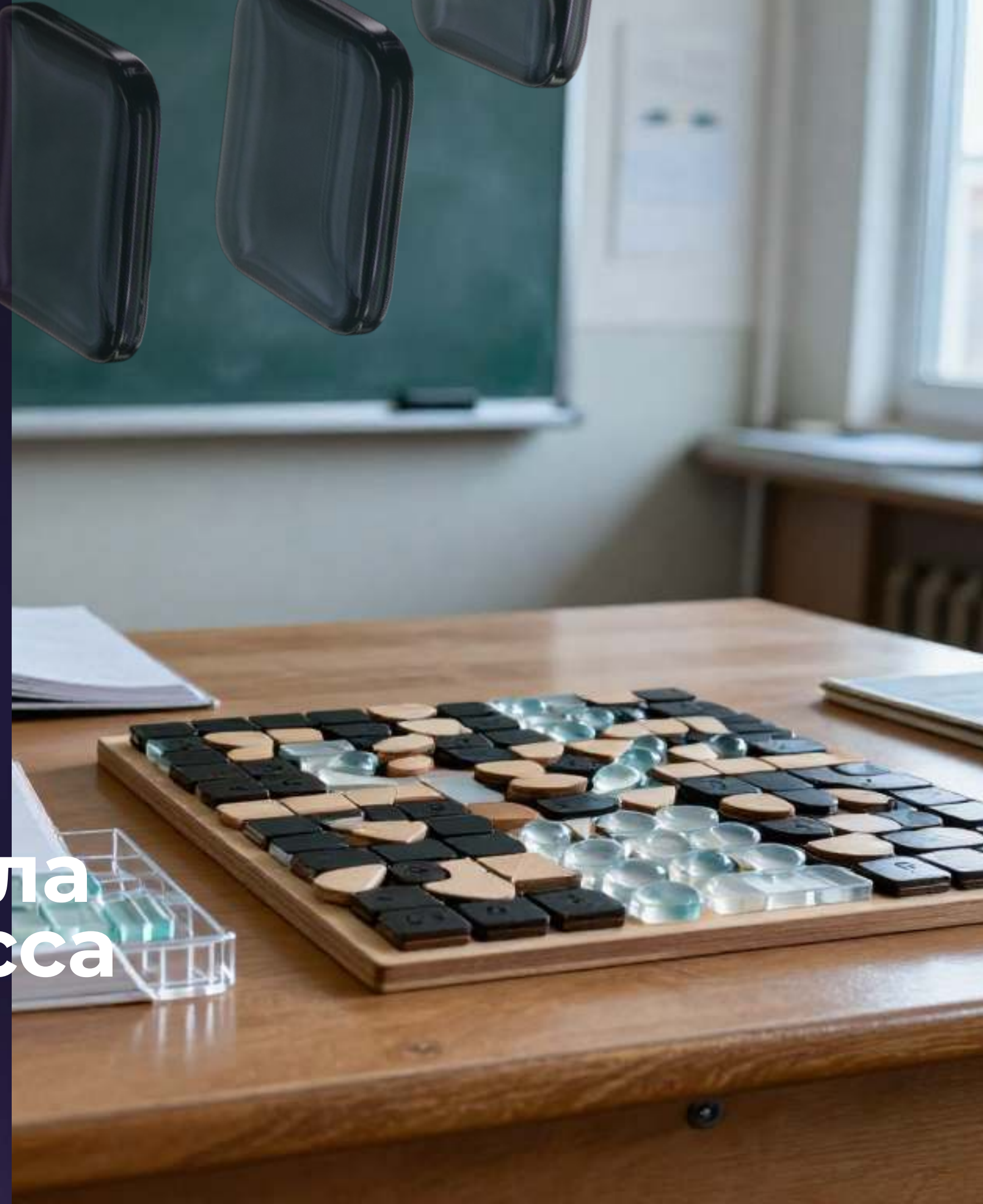


Не всякое число выражается дробью: важны форма записи и свойства.

Рациональные и иррациональные числа в курсе алгебры 10 класса



Зачем различать эти числа в старшей школе

Рациональные и иррациональные числа образуют действительные числа — основу уравнений, неравенств, функций, графиков и измерений в алгебре и геометрии.

Рациональные и иррациональные числа: сравнение признаков

Сравнение показывает, по каким признакам быстро определить тип числа и не спутать запись с его свойством.

Признак	Рациональные	Иррациональные
Запись	a/b	не a/b
Десятичная	конечная/ периодическая	бесконечная непериодическая
Примеры	5, $-7/4$	$\sqrt{2}$, π

Главный критерий различения — возможность точной записи в виде обыкновенной дроби.

Школьный курс алгебры, 10 класс.

Иерархия числовых множеств



Схема показывает включение числовых множеств: от более узких к более широким.

Рациональные и иррациональные числа не пересекаются, но вместе полностью составляют множество действительных чисел.

Классификация числовых множеств в школьной алгебре.

Десятичная запись как главный признак

Конечная запись

Если десятичная дробь оканчивается, число рационально: например, $1/8 = 0,125$, а $7/20 = 0,35$.

Периодическая запись

Повторяющийся период тоже указывает на рациональность: $2/3 = 0, (6), 0, (27)$ и другие подобные записи можно представить дробью.

Бесконечный непериод

У иррациональных чисел запись продолжается бесконечно и не образует повторяющегося блока: $\sqrt{2}$, π и $\sqrt{3}$ — типичные примеры.

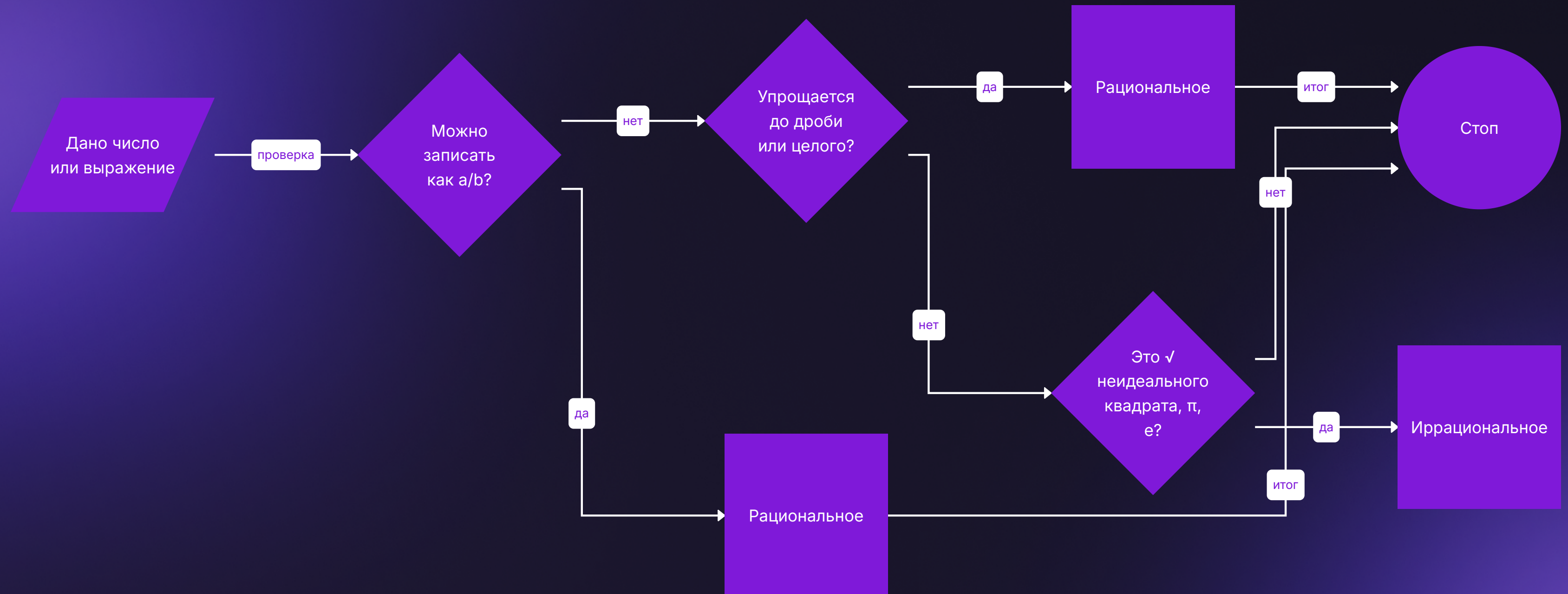
Практический вывод

Чтобы отличить тип числа, важно не длина записи, а наличие периода и возможность восстановить точную дробь.

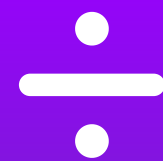


Как определить, является ли число рациональным

Алгоритм проверки по виду записи и результату упрощения выражения.



Состав множества рациональных чисел



Обыкновенные дроби

Дроби с целым числителем и знаменателем, отличным от нуля, полностью входят в множество рациональных чисел: $7/9$, $-4/11$, $5/2$.



Удобство вычислений

С рациональными числами действуют обычные правила арифметики, поэтому они особенно удобны для преобразований и проверки ответов.



Целые числа

Любое целое число рационально, потому что его можно представить как отношение самого числа к единице, например $-12 = -12/1$.



Десятичные дроби

Конечные и периодические десятичные записи тоже рациональны, потому что их всегда можно преобразовать в обыкновенную дробь.

Свойства рациональных чисел

01 Замкнутость

При сложении, вычитании, умножении и делении на ненулевое число результат рациональных чисел снова остаётся рациональным.

02 Переместительное свойство

Слагаемые и множители можно менять местами без изменения результата, что упрощает вычисления и группировку выражений.

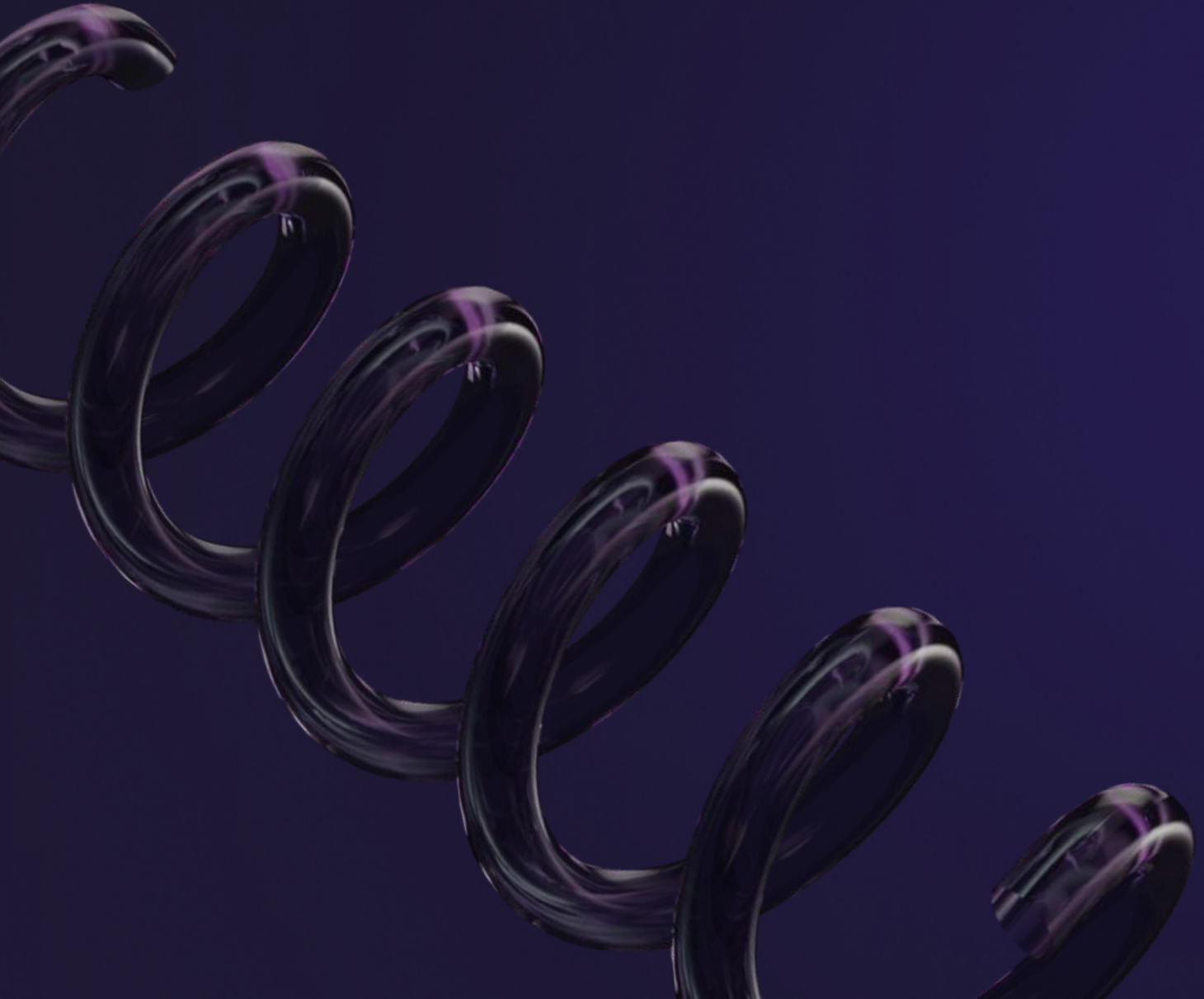
03 Сочетательное свойство

При сложении и умножении можно менять порядок выполнения действий, выбирая наиболее удобную последовательность преобразований.

04 Распределительное свойство

Умножение суммы на число позволяет раскрывать скобки и приводить выражения к более простому виду по стандартным правилам алгебры.

Откуда появляются иррациональн ые числа



Геометрические измерения

Иррациональные числа возникают, когда длины, площади или диагонали не выражаются точной дробью. Классический пример — диагональ квадрата со стороной 1.

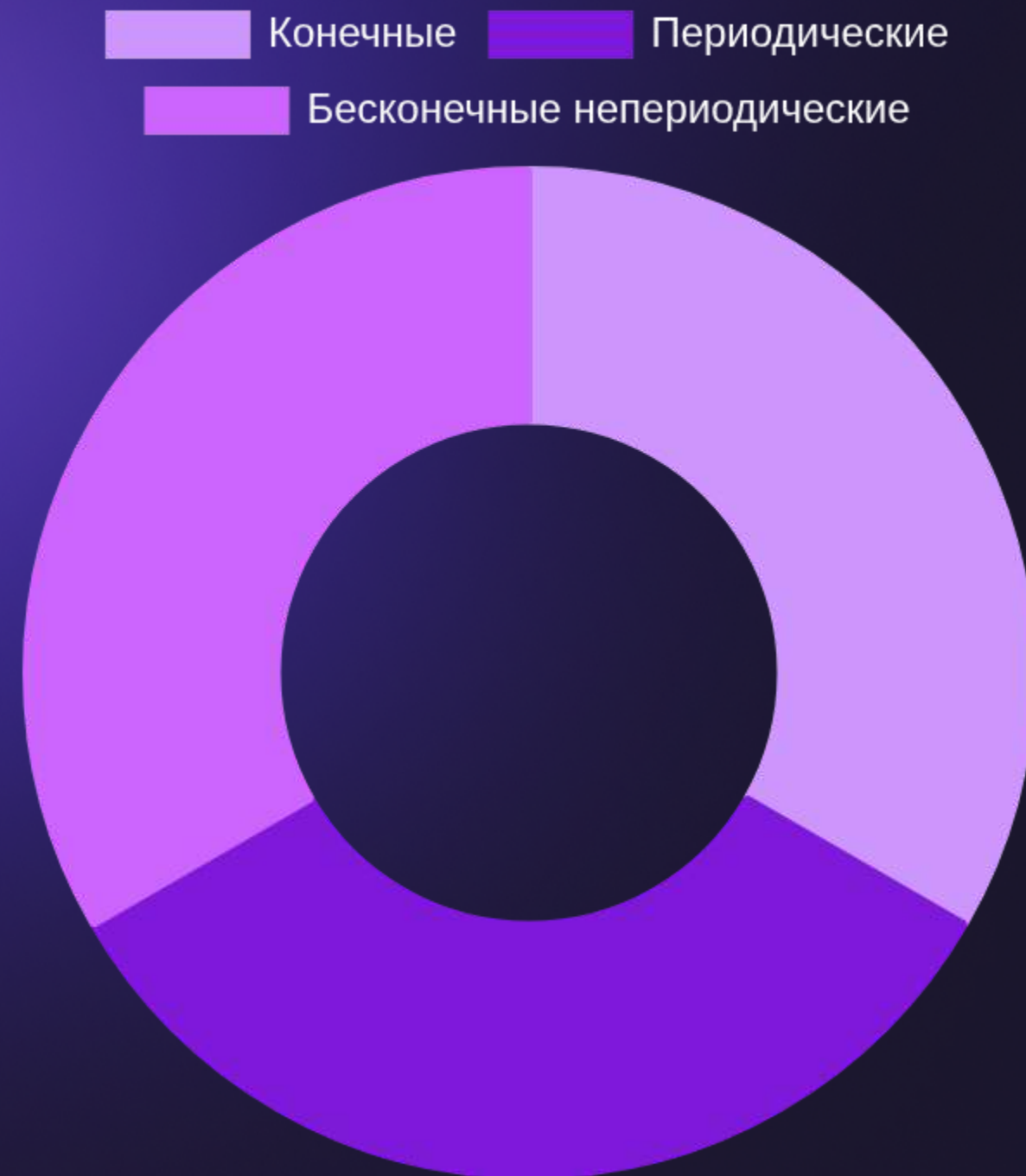
Кривые и формулы

Число π появляется в длине окружности и площади круга, а e — в задачах, связанных с ростом, изменениями и непрерывными процессами.

Корни уравнений

Некоторые квадратные уравнения дают иррациональные корни, например $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$; их десятичная запись бесконечна и не имеет периода.

Виды десятичной записи чисел



Тип записи часто позволяет распознать число без полного вычисления: период указывает на рациональность, отсутствие периода — на иррациональность.

У рациональных чисел запись конечна или периодична; бесконечная непериодическая запись характерна для иррациональных чисел.

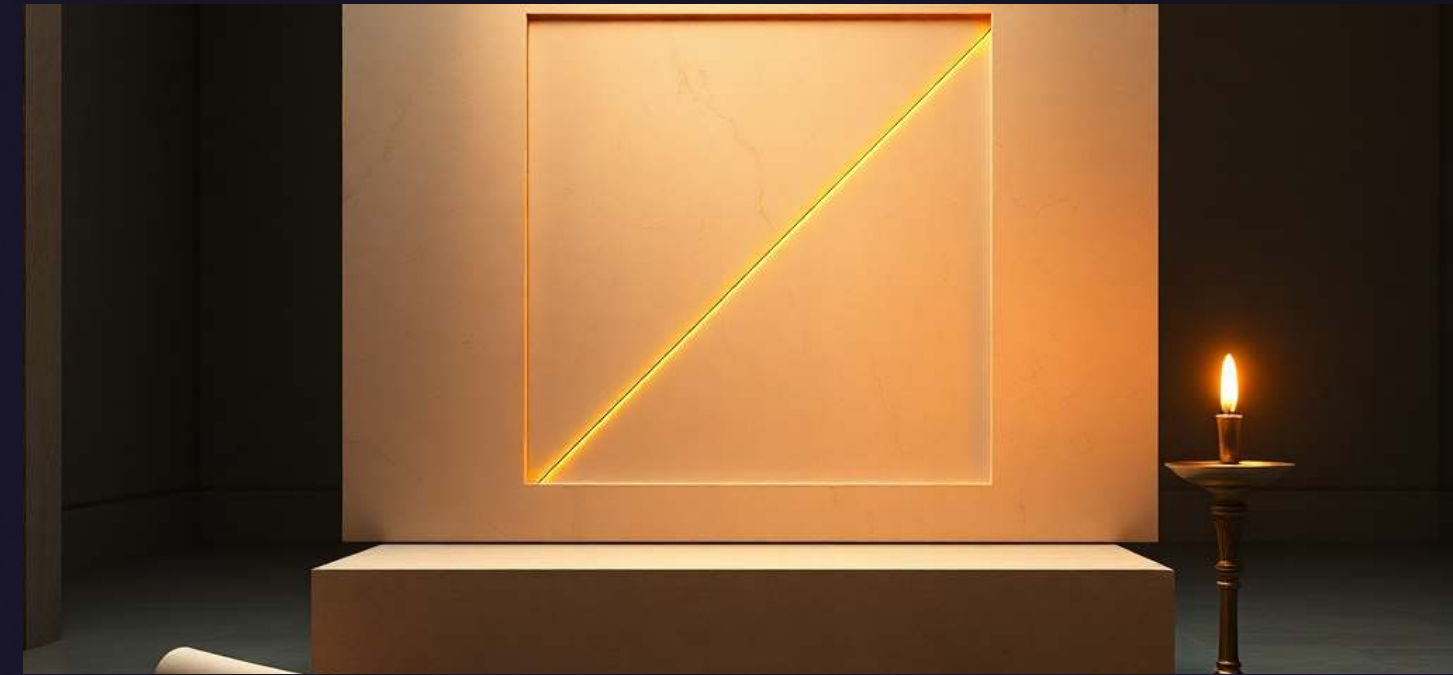
Школьная классификация десятичных записей чисел.

Как квадрат со стороной 1 приводит к $\sqrt{2}$



Диагональ, которую нельзя записать дробью

Если у квадрата сторона равна 1, его диагональ по теореме Пифагора равна $\sqrt{2}$. Попытка представить это число обыкновенной дробью не даёт точного результата: десятичная запись продолжается бесконечно. Именно поэтому $\sqrt{2}$ стало классическим примером иррационального числа.



Открытие, изменившее античную математику

Для древнегреческих математиков оказалось неожиданным, что диагональ квадрата и его сторона не имеют общей меры. Это открытие показало, что не каждую величину можно выразить отношением целых чисел. На рисунке квадрат с диагональю наглядно объясняет, откуда возникает $\sqrt{2}$.

π связывает окружность
с её диаметром и остаётся
одним из главных чисел
в геометрии.

3,14159...

— это приближённое значение числа π , которое используется в формулах длины окружности и площади круга.

Справочные данные по числу π ;
школьный курс геометрии

Точки на прямой: у рациональных и иррациональных чисел нет разрывов



■ Каждому числу — своё место

Любое рациональное или иррациональное число можно изобразить точкой на координатной прямой. Координата точки показывает точное значение, а не только его приближённую запись.

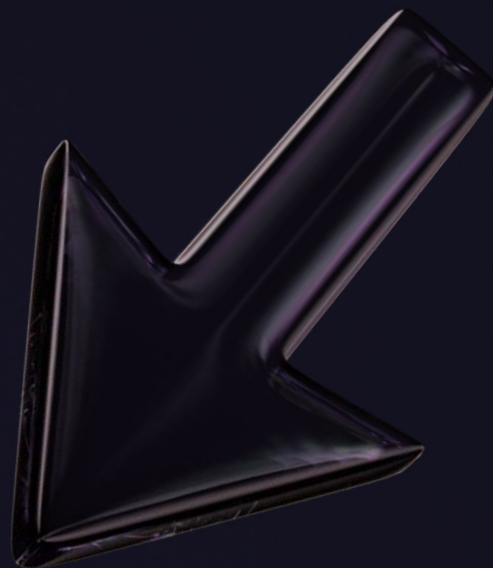
■ Между числами всегда есть новые

Если взять два различных действительных числа, между ними найдётся бесконечно много рациональных и бесконечно много иррациональных. Поэтому на прямой не существует «пустых» участков.

■ Плотность множества

Это свойство называют плотностью действительных чисел. Оно объясняет, почему на числовой прямой можно бесконечно уточнять положение точки, не исчерпывая все возможные значения.

Как распознать тип числа по записи



В таблице показано, что внешний вид записи не всегда сразу раскрывает тип числа: иногда нужно сначала упростить выражение.

Периодическая запись и целые числа относятся к рациональным, а окончательное решение часто требует упрощения выражения.

Число	Тип	Основание
7	рациональное	целое
$-4/11$	рациональное	дробь
0, (18)	рациональное	период

Что происходит при действиях с числами

01

Рациональные сохраняются

При сложении, вычитании, умножении и делении на ненулевое число рациональные числа остаются рациональными. Это делает их удобными для точных преобразований в алгебре и арифметике.

02

Иррациональные не всегда «сложнее»

С иррациональными числами результат зависит от записи выражения. Например, $\sqrt{2} + \sqrt{2}$ даёт $2\sqrt{2}$, а $\sqrt{2} + (-\sqrt{2})$ приводит к нулю, то есть к рациональному числу.

03

Смешанные случаи возможны

Произведение или сумма рационального и иррационального числа могут оказаться как иррациональными, так и рациональными. Поэтому для ответа важно не угадывать, а упрощать выражение.

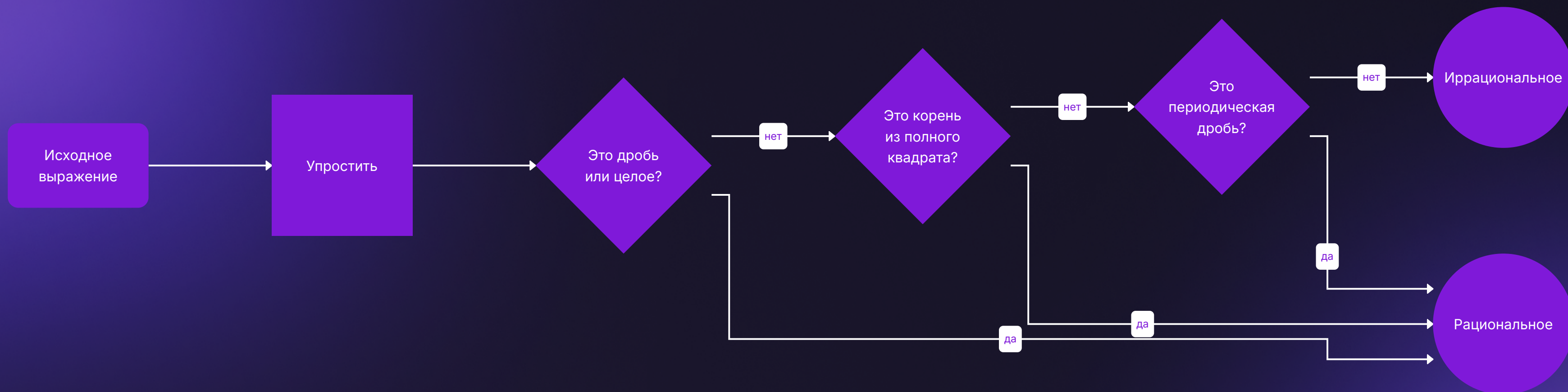
04

Проверка результата

После вычислений полезно определить тип ответа: можно ли записать его в виде дроби, целого числа или периодической десятичной дроби. Это помогает избежать ошибок в решениях.

Как определить тип результата после преобразования

Схема основана на упрощении выражения и последующей проверке его записи.



На что чаще всего ошибаются

Любая бесконечная дробь

Не всякая бесконечная десятичная запись иррациональна. Если в ней есть период, то число рациональное, потому что его можно представить обыкновенной дробью.

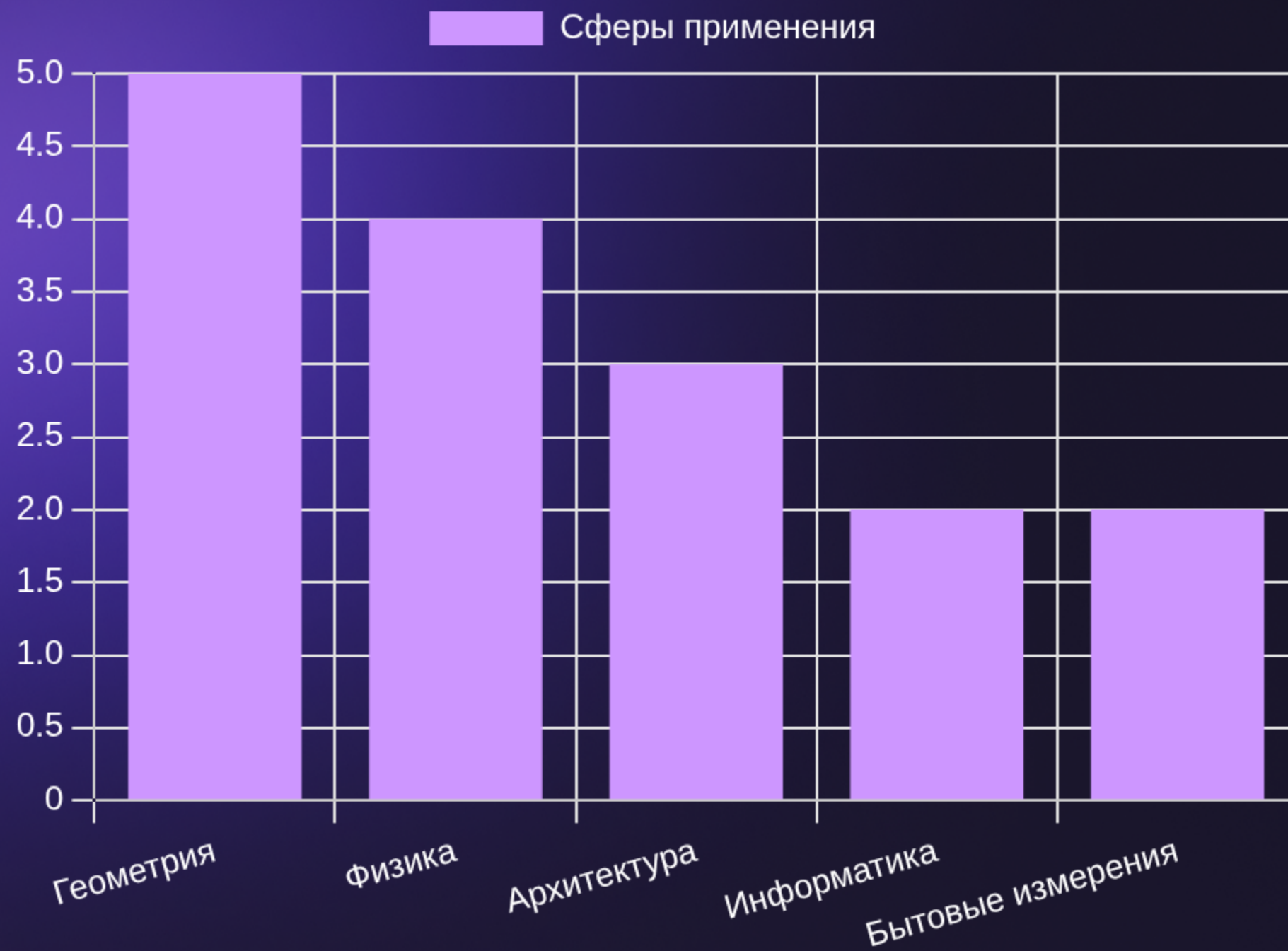
Любой корень

Корень не всегда означает иррациональность. Если подкоренное выражение — полный квадрат, например 16 или 25, то результат равен целому числу и относится к рациональным.

Точное и приближённое

Запись 3,14 не тождественна π : это лишь приближение. Смещение точного значения с округлённой записью приводит к неверным выводам в задачах и вычислениях.

Где используются рациональные и иррациональные числа



На практике эти числа чаще всего встречаются в задачах на длины, площади и окружности, но также важны в расчётах моделей, погрешностей и приближений.

Наибольшая нагрузка приходится на геометрию и измерения; иррациональные числа особенно нужны там, где возникает окружность или корень.

Содержательная оценка по типовым задачам школьного курса алгебры и геометрии

Почему эта тема нужна в решениях



Упрощение выражений

При вычислениях важно уметь сокращать дроби, извлекать корни из полных квадратов и отличать выражения, которые действительно дают иррациональный результат, от тех, что упрощаются.



Основа для дальнейших разделов

Рациональные и иррациональные числа лежат в основе уравнений, функций и тригонометрии. Без уверенного различения этих чисел сложнее понимать более сложные математические модели.



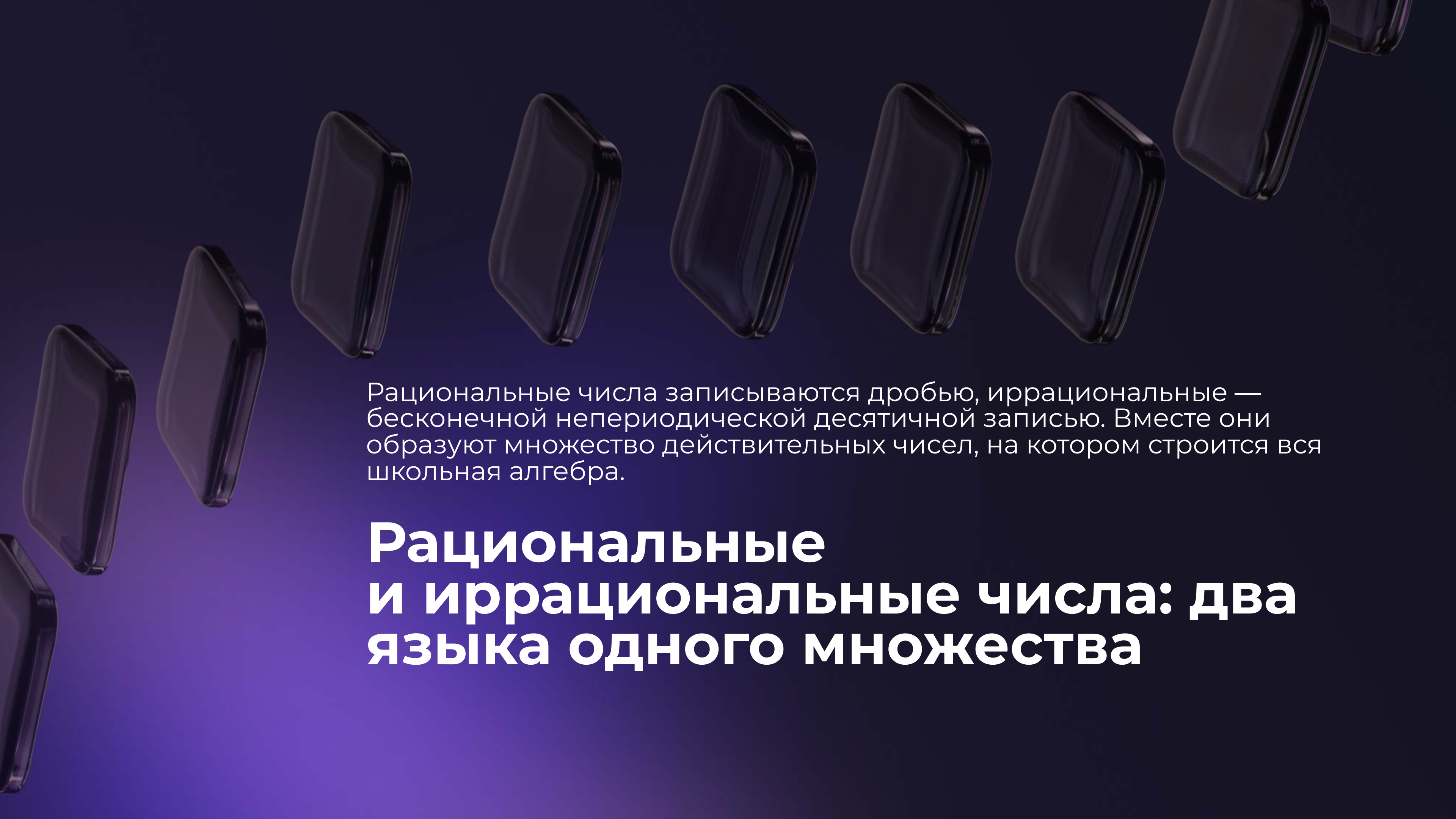
Проверка ответа

Понимание вида числа помогает быстро оценить, корректен ли результат: рациональное число можно записать точно, а иррациональное часто требует формы с корнем или знаком π .



Точная и приближённая запись

Тема учит выбирать между точным значением и округлением. Это необходимо, когда в задаче важно сохранить смысл ответа, а не только получить удобное числовое приближение.



Рациональные числа записываются дробью, иррациональные — бесконечной непериодической десятичной записью. Вместе они образуют множество действительных чисел, на котором строится вся школьная алгебра.

Рациональные и иррациональные числа: два языка одного множества