

Описанный четырёхугольник: основная идея и ключевые свойства

Выпуклый четырёхугольник, около которого
можно описать окружность, касается всех сторон.





Почему эта тема важна в 11 классе

Описанный четырёхугольник связывает многоугольники и окружность, обобщая идеи треугольника: вписанную окружность, инцентр и формулы площади. На практике он соединяет свойства касательных, биссектрис и навыки работы с площадями.

Определение описанного четырёхугольника

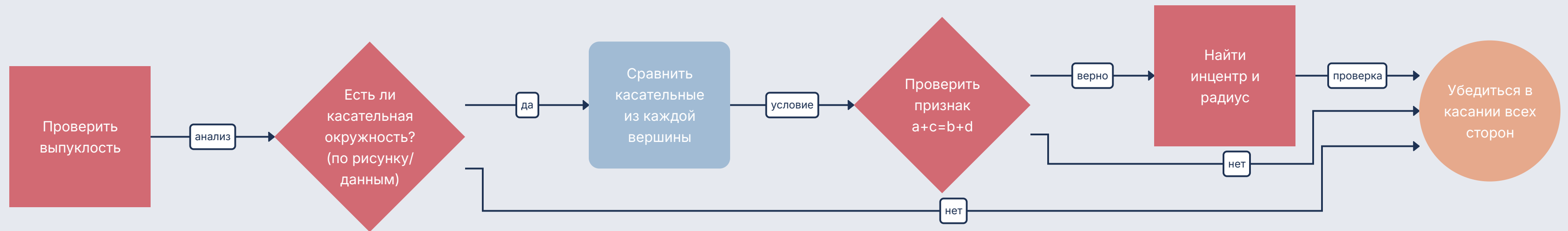
Описанным называется четырёхугольник, около которого можно провести окружность, касающуюся всех четырёх его сторон. Такая окружность называется вписанной в четырёхугольник.

Центр вписанной окружности называют инцентром. Радиус вписанной окружности обозначают r и определяют как расстояние от инцентра до любой стороны.

Точки касания делят стороны на отрезки. Касательные, проведённые из одной вершины к окружности, имеют равные длины, поэтому соответствующие отрезки оказываются равными.

Распознаём описанность: от касательных к числовому признаку

Проверка начинается с геометрических условий, затем закрепляется равенством противоположных сумм.



$$a + c = b + d$$

Это равенство выступает критерием, позволяющим установить, что окружность касается всех сторон четырёхугольника.

Для выпуклого четырёхугольника необходимо и достаточно, чтобы сумма длин противоположных сторон была равна: $a + c = b + d$. Тогда окружность существует и касается всех сторон.

Школьный курс планиметрии, тема «описанный четырёхугольник»

Свойства описанного четырёхугольника и их смысл

Таблица связывает геометрические факты (касательные и биссектрисы) с числовыми равенствами.

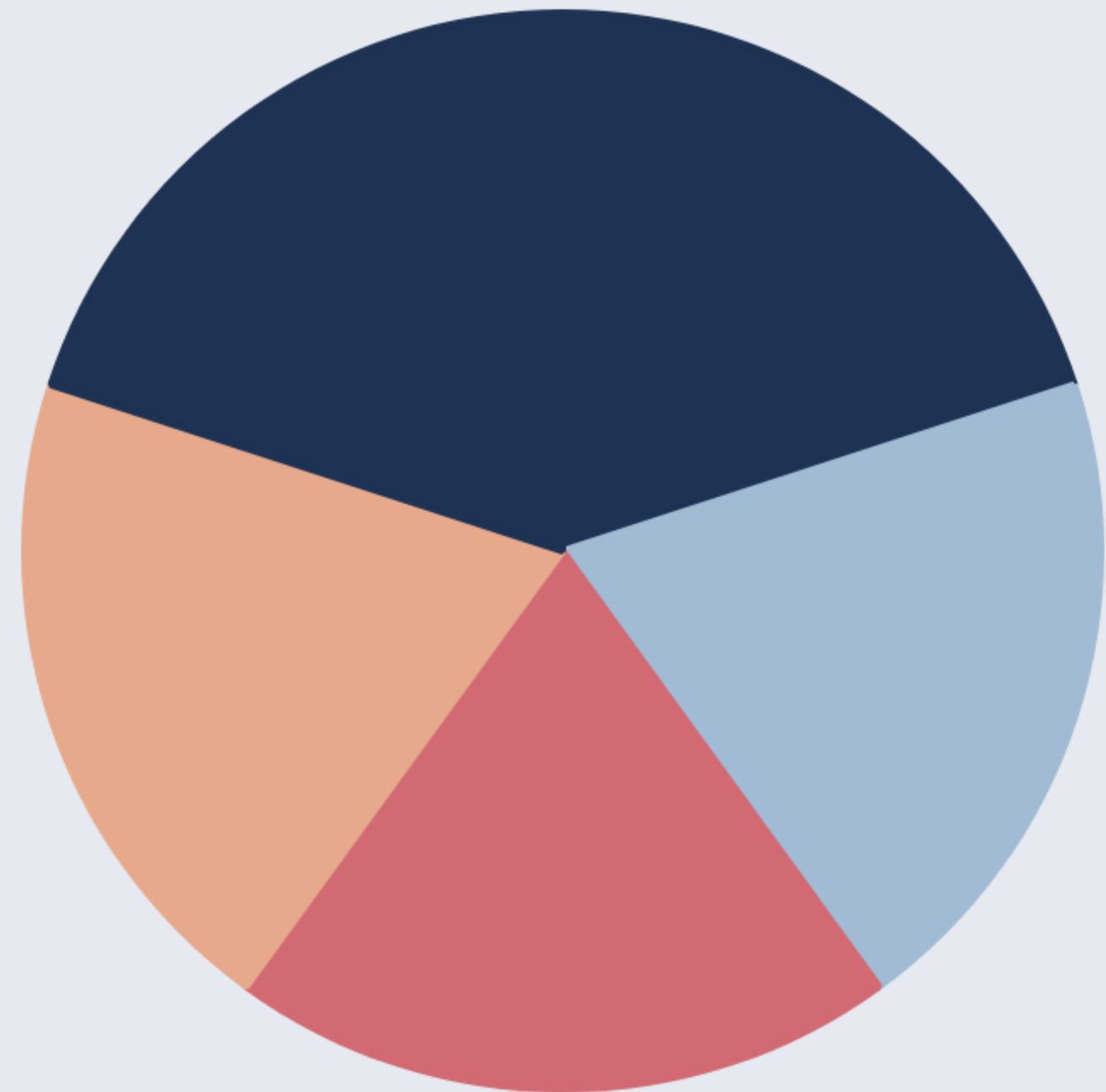
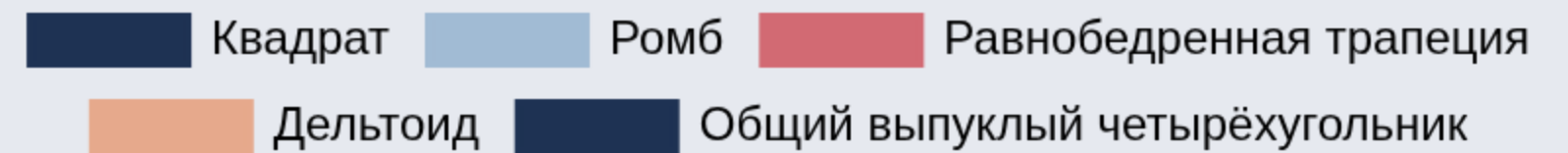
Когда одновременно выполняются равенства касательных и признак $a+c=b+d$, инцентр и радиус согласуются, подтверждая существование вписанной окружности.

Свойство	Формулировка	Математический смысл
Касательные	Касательные из одной вершины равны	Отрезки до точек касания равны
Стороны	Сумма противоположных сторон равна	$a+c=b+d$
Инцентр	Пересечение биссектрис	Единая точка центра вписанной окружности
Радиус	Расстояние до каждой стороны	r — перпендикуляр от инцентра к стороне

Частные случаи описанного четырёхугольника

В этих фигурах условие описанности проявляется особенно наглядно: больше симметрии — проще видеть вписанную окружность, но общий признак остаётся числовым.

Симметрия помогает распознавать структуру, однако описанность определяется не «красотой», а выполнением точного критерия через стороны.



Схематическая визуализация по школьной программе (доли условные)

Инцентр и точки касания: что видно на рисунке



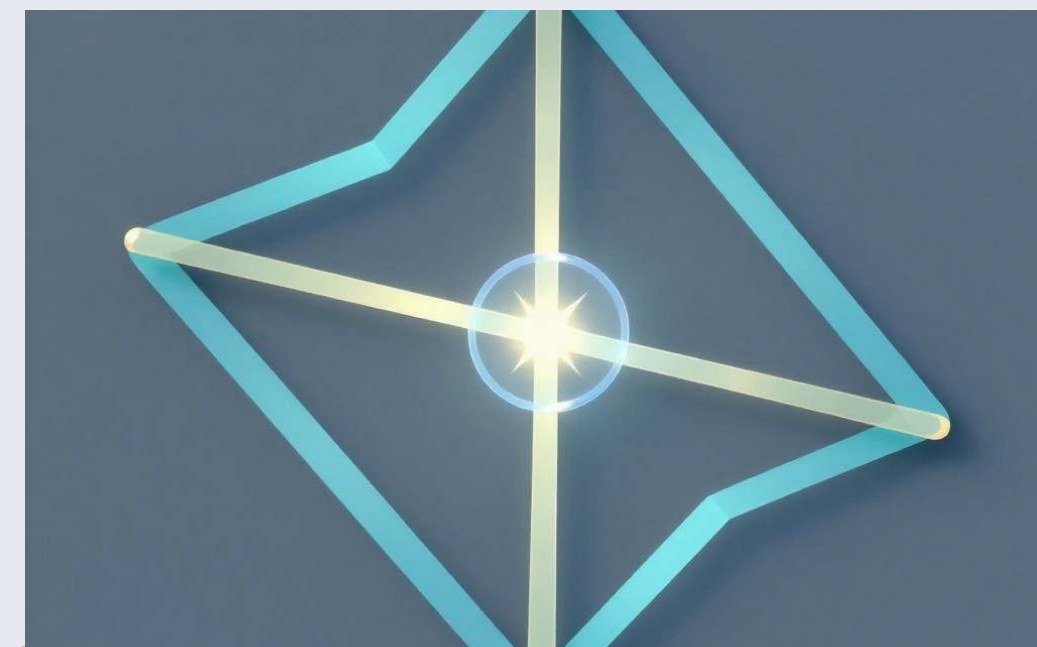
Инцентр — «внутренний центр» равенства расстояний

Инцентр — точка, равноудалённая от всех сторон описанного четырёхугольника. На схеме он отмечается как центр вписанной окружности. От него к каждой стороне опускается перпендикуляр — именно он задаёт радиус r .



Почему касания делят стороны на одинаковые отрезки

Точки касания делят каждую сторону на два отрезка. Из одной вершины к окружности можно провести две касательные, и их длины оказываются равными. Поэтому на соседних сторонах появляются попарно равные отрезки, что удобно для вычислений.



Как биссектрисы приводят к нужной точке

Если из углов четырёхугольника провести биссектрисы, то их пересечение и есть инцентр. Это связывает окружность с угловыми свойствами фигуры. На изображении биссектрисы сходятся в центре, откуда радиусы перпендикулярны сторонам.

Формула Пито для периметра

01

Для описанного четырёхугольника периметр удобно выражается через любые две соседние стороны: $P = 2(a + c) = 2(b + d)$. Это следует из равенства противоположных сумм.

02

Если в задаче известны три стороны, формула помогает быстро получить четвёртую через связь $a + c = b + d$, не усложняя вычисления лишними шагами.

03

Часто формулу Пито применяют вместе с условием описанности: проверяют, сходятся ли найденные значения, и подтверждают корректность решения по геометрическому смыслу касаний.

Связь площади, радиуса и полупериметра

При одном и том же радиусе r площадь меняется строго пропорционально полупериметру: $S = r \cdot p$. Это избавляет от необходимости делить фигуру на треугольники.

График показывает прямую зависимость: увеличивая p , мы увеличиваем S в том же множителе r . Если r задан, площадь находится по одной подстановке.



Схематический учебный пример (значения подобраны для демонстрации линейной зависимости)

$$S = r \cdot p$$

Зная радиус вписанной окружности и полупериметр, можно находить площадь без разбиения фигуры на треугольники.

Площадь описанного четырёхугольника выражается через радиус r вписанной окружности и полупериметр p . Это удобное обобщение школьной формулы для треугольника.

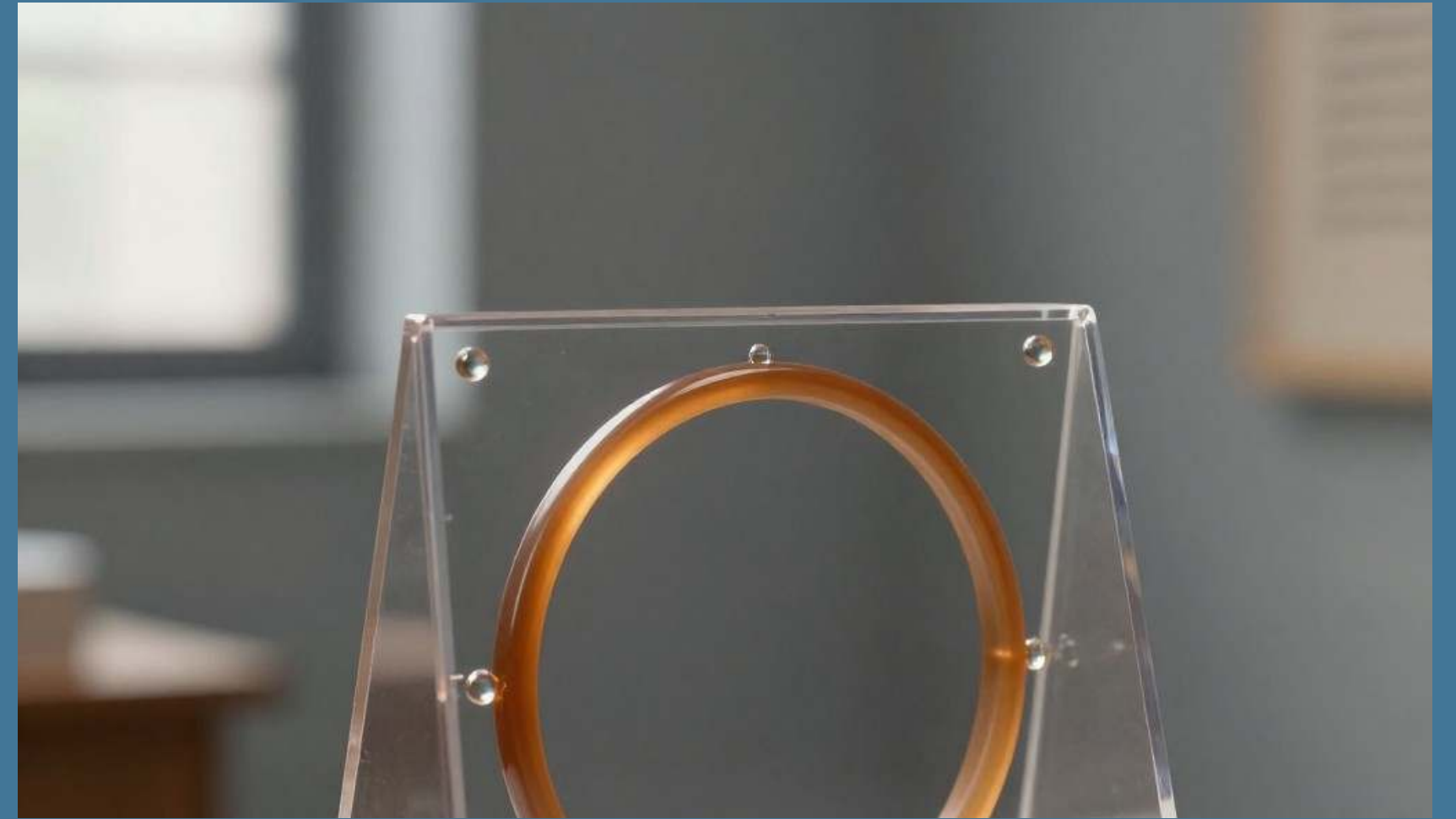
Формула из курса планиметрии (школьная геометрия, тема «описанный четырёхугольник»).

Равнобедренная трапеция как важный пример



Симметрия помогает проверить условие

Равнобедренная трапеция «подсказывает» геометрию: у неё боковые стороны равны, а основания расположены симметрично относительно оси. Если вокруг такой трапеции можно описать окружность, сумма оснований становится равной сумме боковых сторон.



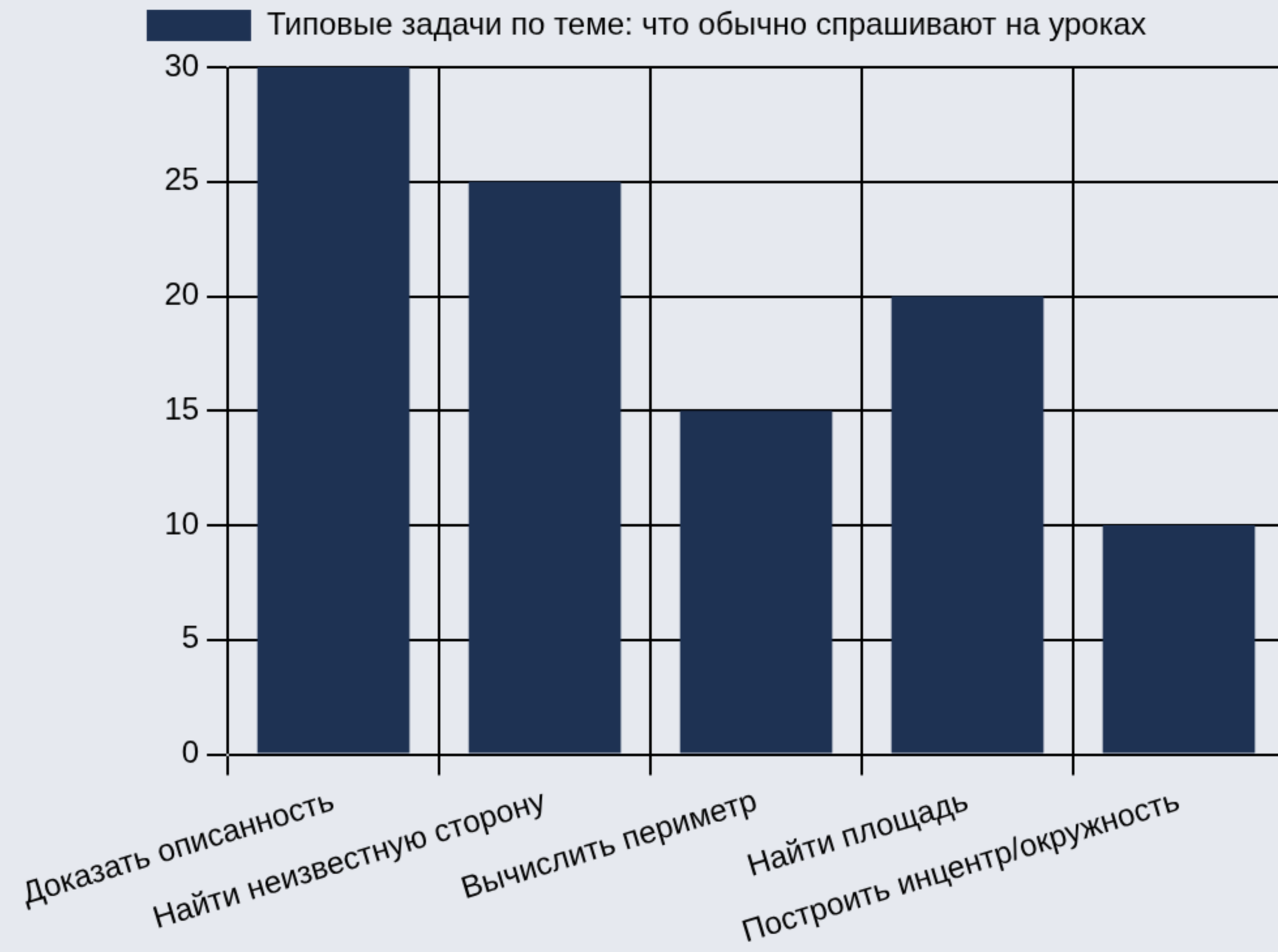
Ось симметрии проходит через инцентр

Когда трапеция описанная и равнобедренная, её ось симметрии проходит через центр вписанной окружности. Поэтому точки касания оказываются симметричными, а равные касательные от вершин визуально подтверждают условие существования вписанной окружности.

Типовые задачи по теме описанного четырёхугольника

Чаще всего опираются на признак $a + c = b + d$ и на связь площади $S = r \cdot p$.

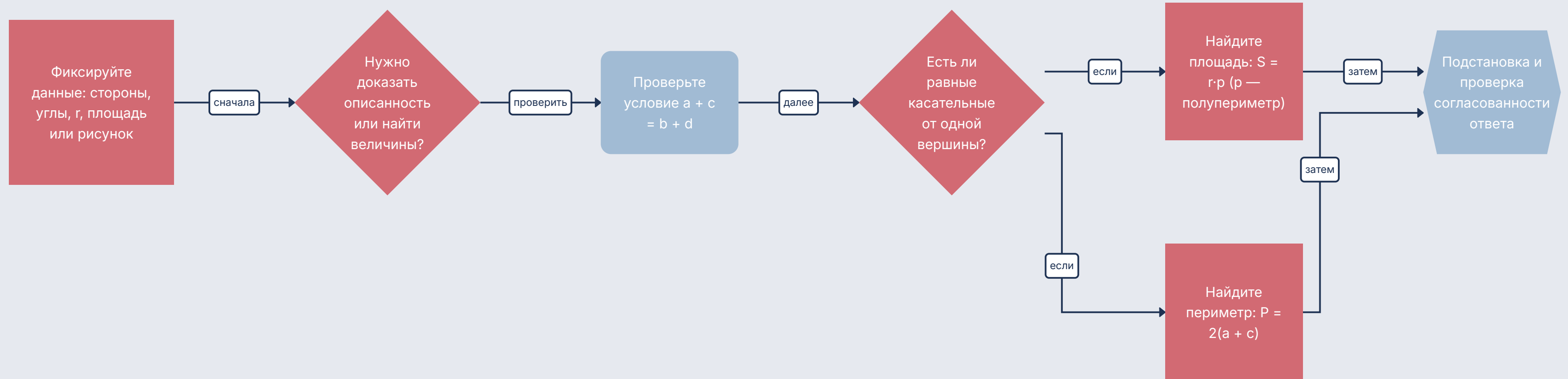
Диаграмма показывает баланс между доказательными и вычислительными заданиями: формулы работают как универсальный инструмент, а построения опираются на биссектрисы.



Схематическая учебная классификация типовых упражнений (без привязки к конкретной статистике).

Алгоритм решения задач на описанный четырёхугольник

Логика решения в школе: от данных и проверки признаков — к выбору формулы.



Ключевые формулы темы

Формула	Что выражает	В каких задачах
$a + c = b + d$	Признак описанности	Доказать существование вписанной окружности
$P = 2(a + c)$	Периметр	Быстро найти P через две противоположные стороны
$S = r \cdot p$	Площадь	Вычислить S при известном r и сторонах
$t_1 = t_2$	Равенство касательных	Проверка через длины отрезков к точкам касания

Таблица связывает формулы описанного четырёхугольника с тем, что именно они выражают, и с типами задач, где их применяют.

Все формулы вытекают из существования вписанной окружности и симметрии касательных от одной вершины, поэтому выбор формулы всегда зависит от того, что дано в задаче.

Типичные ошибки в решении задач

01

Путают описанный и вписанный четырёхугольники: равенство противоположных углов относится к вписанному в окружность варианту, а признак $a + c = b + d$ — к описанному.

02

Применяют условие $a + c = b + d$ без проверки выпуклости. Но признак сформулирован для выпуклых четырёхугольников, и при невыпуклой конфигурации рассуждение становится некорректным.

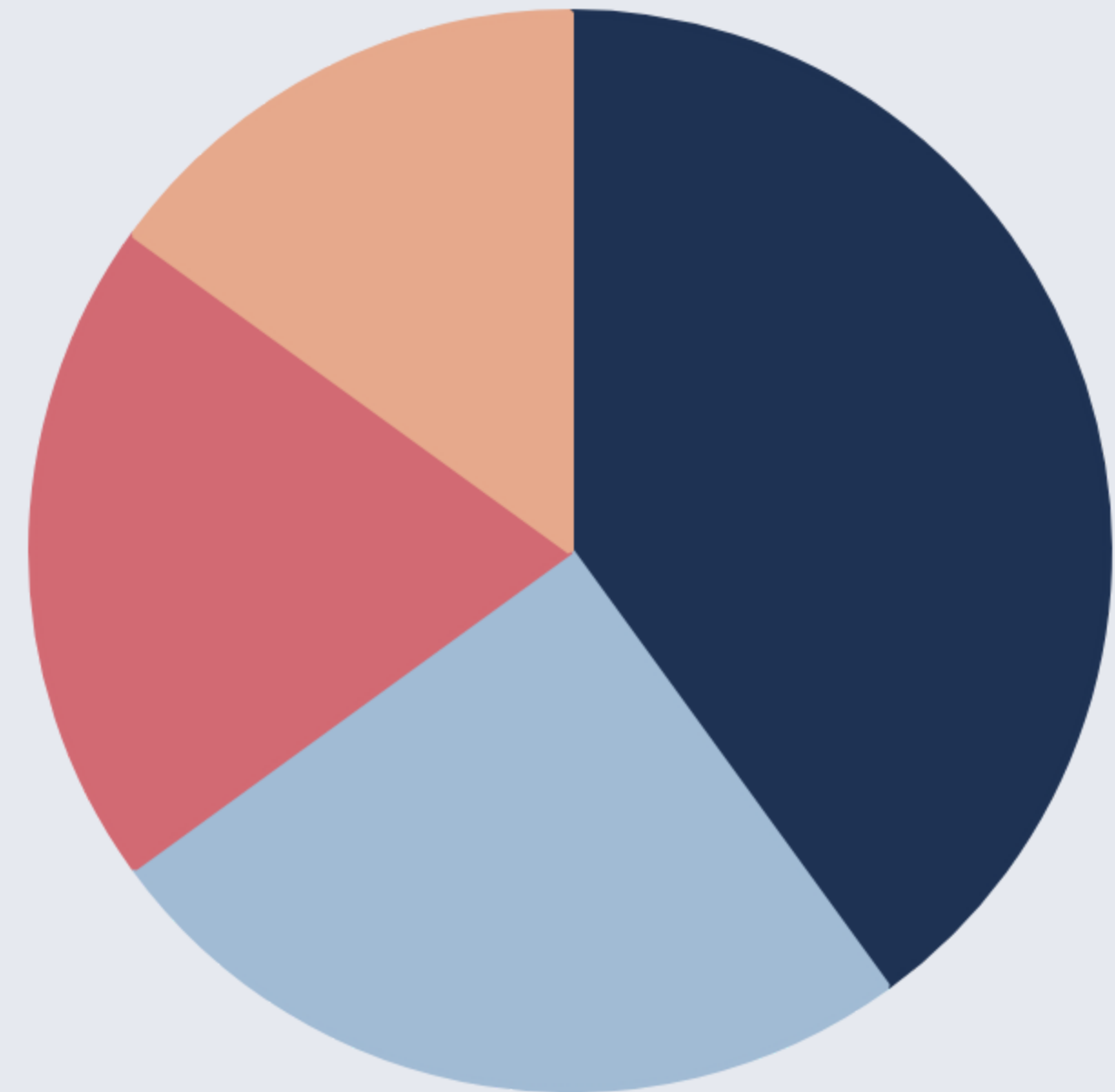
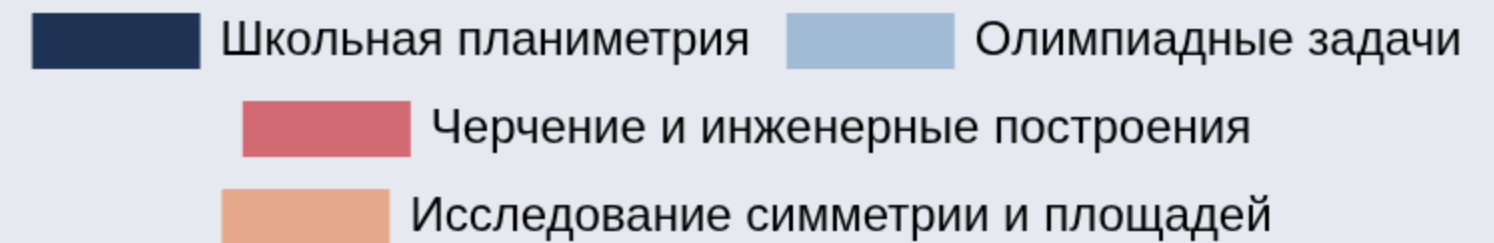
03

Неверно используют «равенство касательных»: оно относится только к отрезкам, выходящим из одной и той же вершины к точкам касания. Ещё одна ошибка — подменить полупериметр полным периметром в формуле площади.

Где применяется тема описанного четырёхугольника

В олимпиадах часто рассматривают касательные и биссектрисы как «двигатель» доказательства, а в задачах на площади — формулу $S = r \cdot p$.

Распределение подчёркивает, что тема работает сразу в нескольких навыках: доказательство, вычисление и точные построения через инцентр.



Учебно-практическая схема областей применения (без привязки к статистике по задачникам).

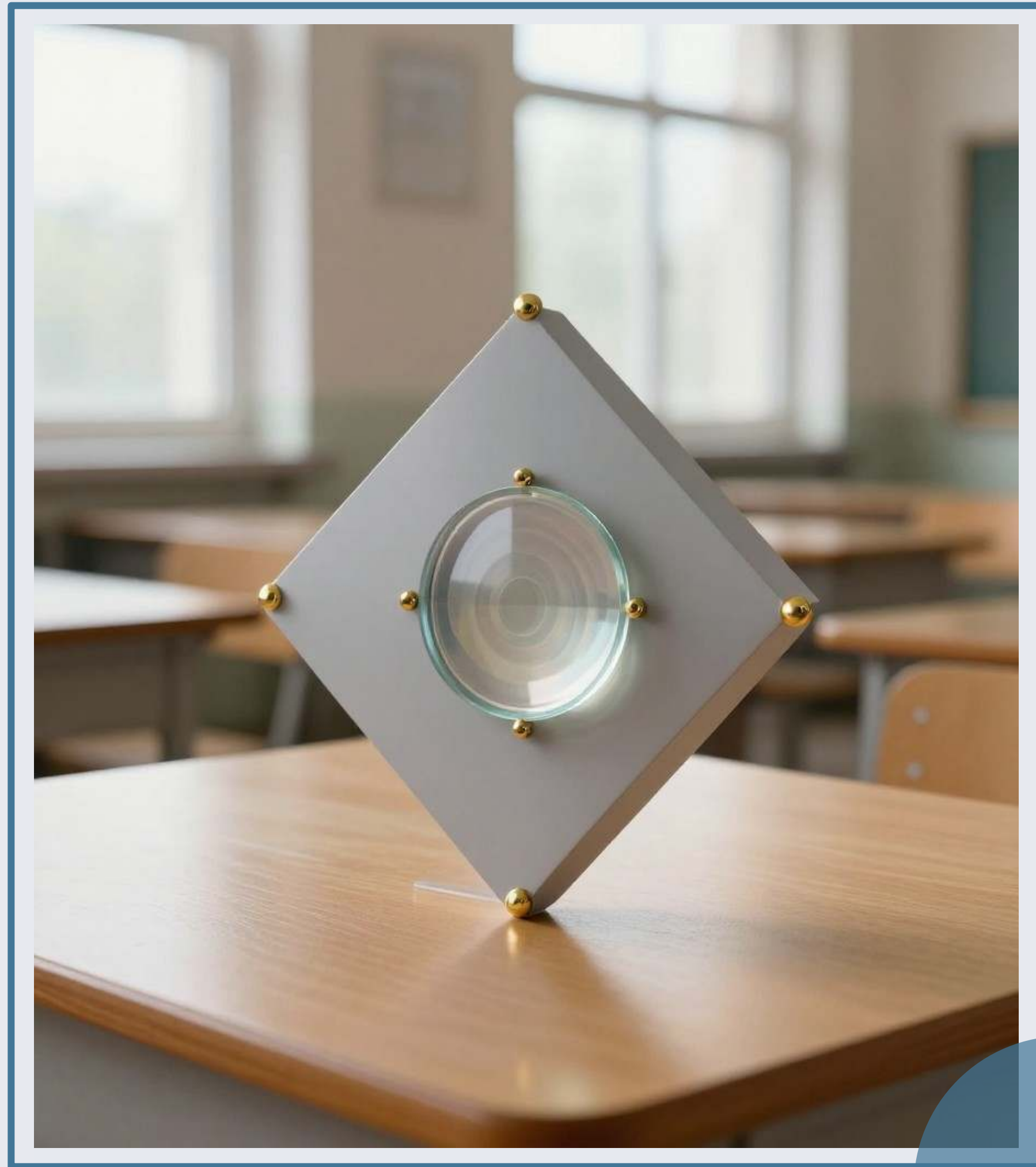
Построение вписанной окружности в четырёхугольник

Шаг 1: находим центр

Центр вписанной окружности — инцентр — находится как точка пересечения биссектрис углов четырёхугольника. Это положение связывает касательные и равенство расстояний от центра до сторон.

Шаг 2: задаём радиус и проверяем касание

После нахождения инцентра опускают перпендикуляр к любой стороне: его длина равна радиусу r . Если окружность действительно касается всех четырёх сторон, четырёхугольник является описанным.

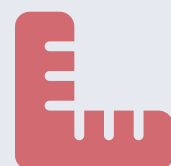


Связь с другими темами школьной геометрии



Касательные и равные отрезки

Идея касающейся окружности превращается в набор равенств: длины касательных от одной вершины оказываются ключом к признаку описанности.



Тождества для сторон и периметра

Через равенство $a + c = b + d$ легко переходить к периметру $P = 2(a + c)$ и находить неизвестные стороны, не усложняя рисунок.



Биссектрисы углов и инцентр

Точки пересечения биссектрис дают инцентр и связывают геометрию углов с расстояниями до сторон, что напрямую ведёт к радиусу r .



Площади через радиус

Формула $S = r \cdot p$ работает как универсальное «окно» между окружностью и площадью, расширяя подход, знакомый по треугольнику.

Итоги по теме описанного четырёхугольника

Главный признак описанного четырёхугольника — равенство сумм противоположных сторон. Базовые формулы: $P = 2(a + c)$ и $S = r \cdot p$. Инцентр, биссектрисы и точки касания объединяют доказательства, вычисления и построения.