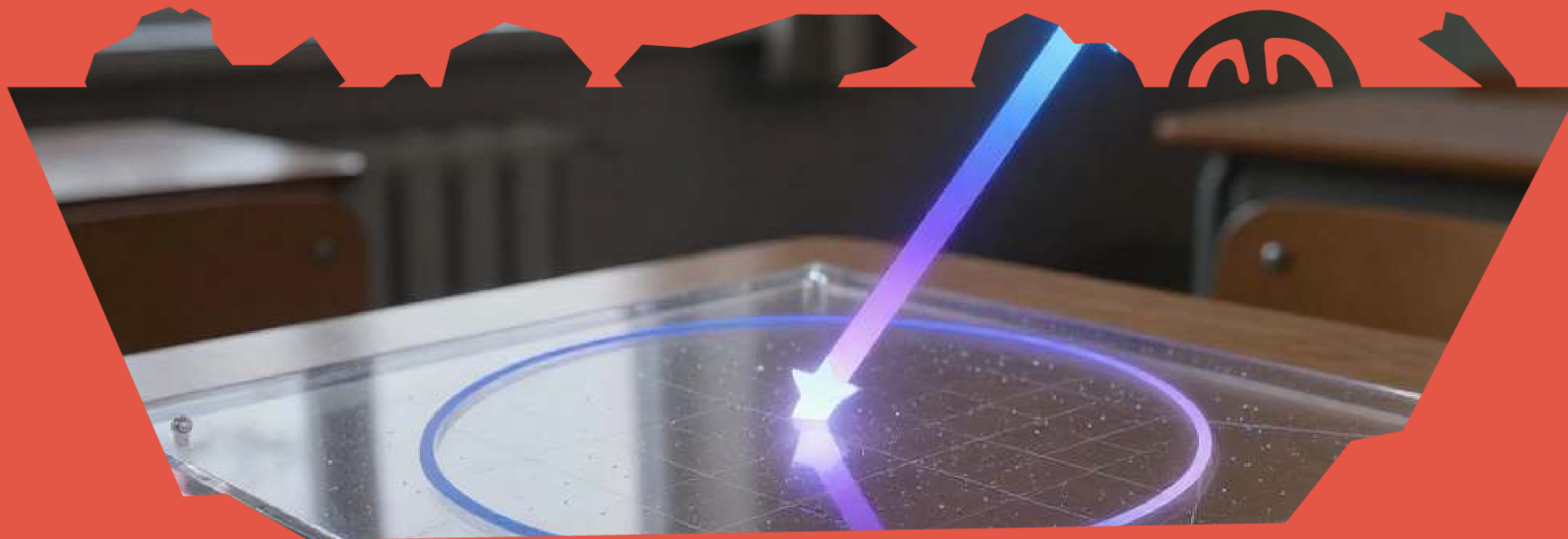


Геометрическая интерпретация комплексных чисел: от записи к образу на плоскости

От формулы к точке, вектору и повороту на плоскости.



От уравнений к геометрии комплексных чисел

Комплексные числа появились как ответ на уравнения без вещественных решений. Позднее Гаусс, Арган, Вессель и Гамильтон придали им наглядный геометрический смысл, который сегодня помогает понимать модуль, аргумент и операции над числами.



Комплексная плоскость и координаты числа $z = a + bi$

Две оси

Комплексная плоскость строится как обычная система координат, но горизонтальная ось соответствует действительной части, а вертикальная — мнимой. Благодаря этому каждое комплексное число получает точное положение на плоскости.

Координаты числа

Числу $z = a + bi$ соответствует точка $M(a, b)$, где a показывает смещение вдоль оси Re , а b — вдоль оси Im . Так алгебраическая запись превращается в геометрический образ.

Действительная и мнимая оси

На оси Re лежат числа вида $a + 0i$, то есть обычные действительные числа. На оси Im находятся числа $0 + bi$, которые задают чисто мнимое направление без действительной составляющей.

Начало отсчёта

Точка $O(0, 0)$ отвечает нулю, поэтому от неё измеряются все координаты и расстояния. Именно от этого начала удобно строить модуль, аргумент и дальнейшие геометрические преобразования.



Точка, радиус-вектор и образ комплексного числа на плоскости

Точка на плоскости

Комплексное число можно изобразить не только записью, но и точкой $M(a, b)$. Тогда само число воспринимается как объект на координатной сетке с определённым положением относительно осей.

Связь с модулем

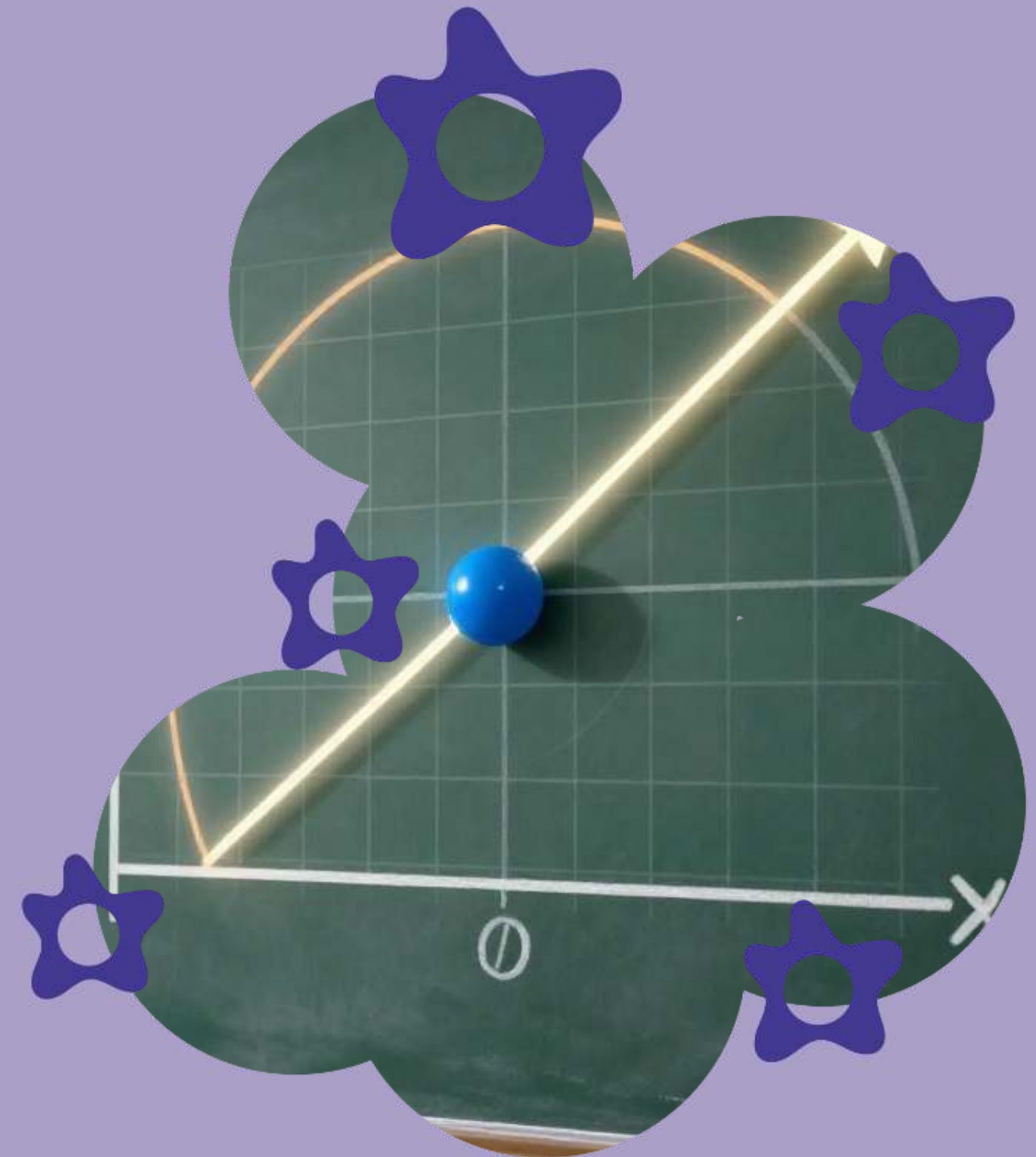
Длина вектора OM равна модулю комплексного числа. Чем дальше точка от начала координат, тем больше модуль, независимо от того, как именно записаны действительная и мнимая части.

Радиус-вектор

От начала координат к точке M проводят радиус-вектор OM . Он показывает не только положение числа, но и его ориентацию в плоскости, поэтому становится наглядной заменой записи $z = a + bi$.

Связь с аргументом

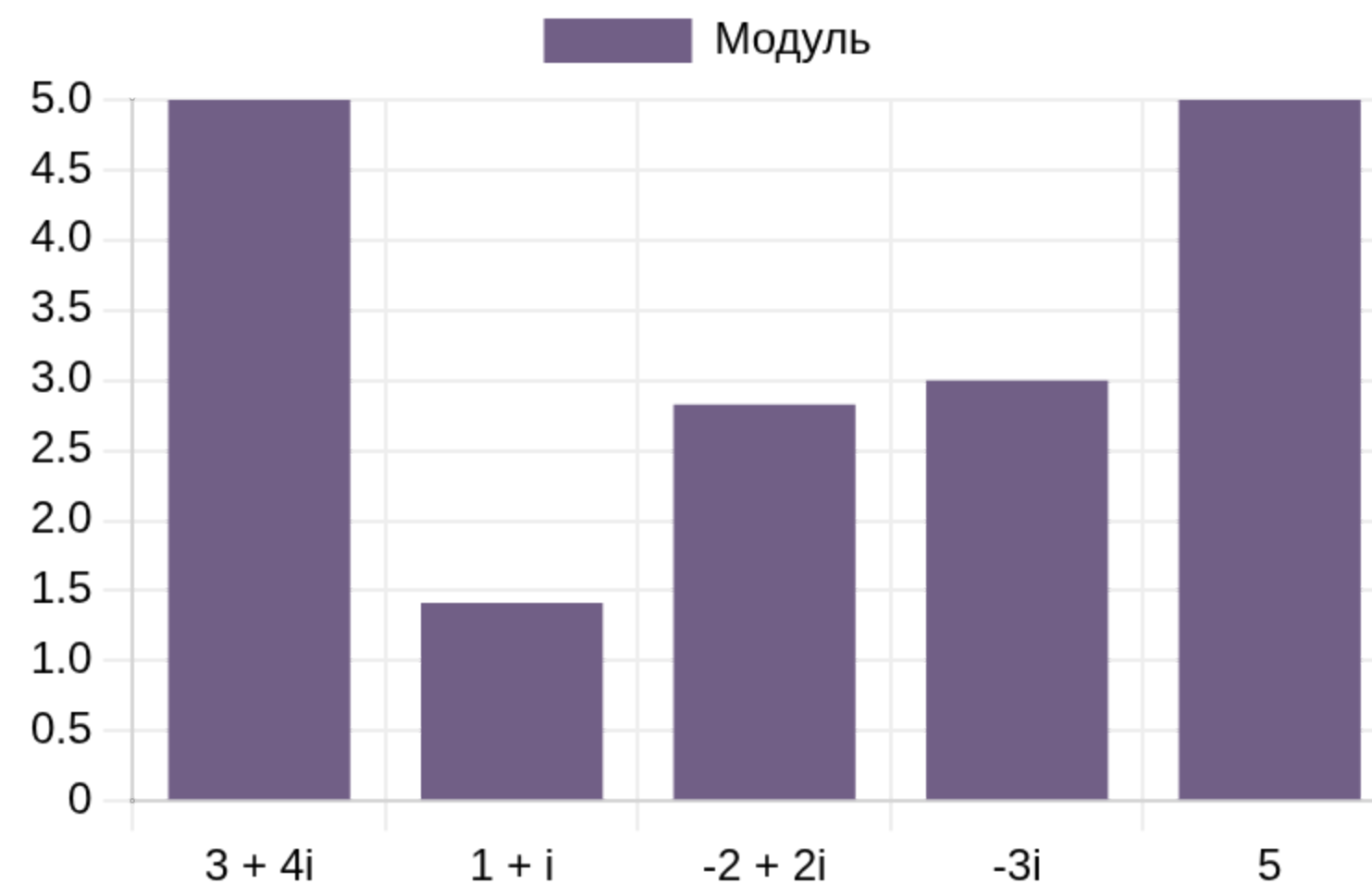
Угол между OM и положительным направлением оси Re задаёт аргумент числа. Поэтому направление вектора сообщает, в какой стороне плоскости расположен образ комплексного числа.



Сравнение модулей нескольких комплексных чисел

Диаграмма помогает быстро увидеть, что одинаковый модуль может встречаться у чисел с разным положением на плоскости.

Наибольшие значения у $3 + 4i$ и 5 , а наименьшее у $1 + i$; модуль определяется расстоянием, а не видом записи.



Вычислено по формуле $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ для указанных чисел.

Этот результат показывает, что модуль — это геометрическая длина, а не просто число в записи. Для точки $3 + 4i$ он совпадает с расстоянием до начала координат.

По формуле $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ для $z = 3 + 4i$.

5

— модуль числа $3 + 4i$,
поскольку оно
образует с осями
прямоугольный
треугольник.

Аргумент комплексного числа и его геометрический смысл

1

Что измеряет аргумент

Аргумент показывает, под каким углом радиус-вектор OM отклонён от положительного направления оси Re . Поэтому он описывает не расстояние, а именно направление положения числа на плоскости.

2

Почему он неоднозначен

Один и тот же луч можно повернуть на полный круг, не изменив направление. Из-за этого аргумент определён с точностью до добавления $2\pi k$, где k — любое целое число.

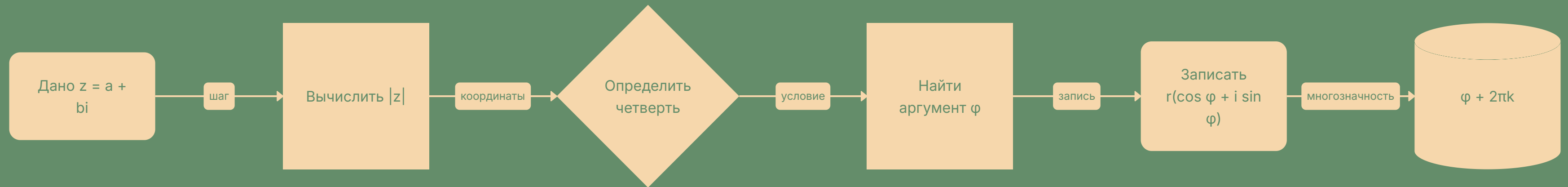
3

Главное значение

Для удобства выбирают главное значение аргумента в заранее заданном промежутке. Это позволяет однозначно сравнивать положения точек и уверенно переходить к полярной форме записи.

Переход от алгебраической формы к полярной записи

Последовательность действий при переводе $z = a + bi$ в тригонометрическую форму.



Формула Эйлера и показательная форма комплексного числа



Единичная окружность и угол

Формула Эйлера связывает поворот на плоскости с экспонентой: каждой точке единичной окружности соответствует число $e^{i\varphi}$. Угол φ задаёт положение точки, а сама запись показывает, как геометрия переходит в удобный алгебраический язык.



Почему форма $re^{i\varphi}$ так удобна

Если комплексное число записано как $re^{i\varphi}$, сразу видны и его модуль, и аргумент. Такая форма особенно полезна при умножении, делении и возведении в степень, потому что операции превращаются в действия над r и φ .

Сложение комплексных чисел как сложение векторов

1

Алгебраическое правило

Если $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$, то сумма находится поэлементно: складываются действительные части и отдельно мнимые. Это делает вычисление простым и полностью согласованным с координатной записью.

2

Геометрический смысл

На плоскости складываются соответствующие векторы, поэтому итоговая точка получается из суммы координат. Такой подход помогает видеть не только результат, но и способ его построения.

3

Параллелограмм

Сумму удобно строить как диагональ параллелограмма, построенного на двух векторах. Этот способ нагляден и показывает, что результат зависит от обоих слагаемых симметрично.

4

Правило «конец к началу»

Второй вектор можно отложить от конца первого, после чего вектор суммы идёт от начала первого к концу второго. Это тот же вектор, что и при построении параллелограмма.

Вычитание и сопряжённое число как геометрические преобразования

Разность как вектор

Разность $z_1 - z_2$ можно понимать как вектор, который соединяет точку z_2 с точкой z_1 . На плоскости это сразу показывает не только величину, но и направление изменения.

Симметрия относительно оси Re

Сопряжённое число $\bar{z} = a - bi$ получается отражением точки $z = a + bi$ относительно действительной оси. При этом действительная часть сохраняется, а мнимая меняет знак.

Одинаковый модуль

Точки z и $\bar{z}$ находятся на одинаковом расстоянии от начала координат, поэтому их модули равны. Это свойство удобно использовать при вычислениях и проверке результатов в задачах.



Как умножение меняет положение точки на плоскости

На диаграмме сравнивается изменение модуля при умножении на стандартные множители; направление поворота в каждом случае задаёт аргумент множителя.

Число может меняться не только по величине, но и по ориентации: умножение объединяет растяжение и поворот в одном действии.



Геометрический смысл умножения в полярной форме

1

Запись через модуль и угол

В полярной форме каждое число удобно рассматривать как сочетание длины и направления. Это позволяет отдельно следить за масштабом и за поворотом фигуры на плоскости.

2

Правило для произведения

При умножении двух комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. Поэтому результат одновременно становится дальше или ближе к началу координат и поворачивается.

3

Практический смысл

Такой взгляд особенно полезен в задачах на подобие, вращение и преобразование фигур. Он упрощает вычисления там, где алгебраическая запись была бы менее наглядной.



Стандартные множители и их геометрический эффект

Таблица показывает, как простые комплексные множители меняют положение точки на плоскости и какое преобразование им соответствует.

Фиксированный множитель задаёт не просто вычисление, а преобразование плоскости: поворот, отражение, растяжение или их сочетание.

Учебный курс математики, раздел
о комплексных числах

Число	Модуль	Аргумент	Эффект
1	1	0	тождественное
-1	1	π	симметрия
i	1	$\pi/2$	поворот 90°
2	2	0	растяжение
$1 + i$	$\sqrt{2}$	$\pi/4$	поворот и растяжение

Сопряжение и вычисление модуля через произведение $z \bar{z}$



Две точки — одно отражение

Если число $z = a + bi$ изобразить на плоскости, то его сопряжённое $\bar{z} = a - bi$ окажется зеркальным отражением относительно оси Re . Эти две точки лежат на одной вертикали и одинаково удалены от начала координат.



Короткий путь к модулю

Произведение $z \bar{z}$ даёт $a^2 + b^2$, а значит, сразу приводит к квадрату модуля: $|z|^2 = z \bar{z}$. Это удобный приём для вычисления расстояния и для рационализации знаменателя в дробях с комплексными числами.

Деление комплексных чисел как обратное преобразование



1. Полярная запись

Сначала число удобно представить в виде $r e^{i\varphi}$. Тогда видно, как деление влияет отдельно на длину радиус-вектора и на его направление.

2. Обратное действие

При делении модуль делимого делится на модуль делителя, а аргумент уменьшается на аргумент делителя. Это отражает обратность по отношению к умножению.

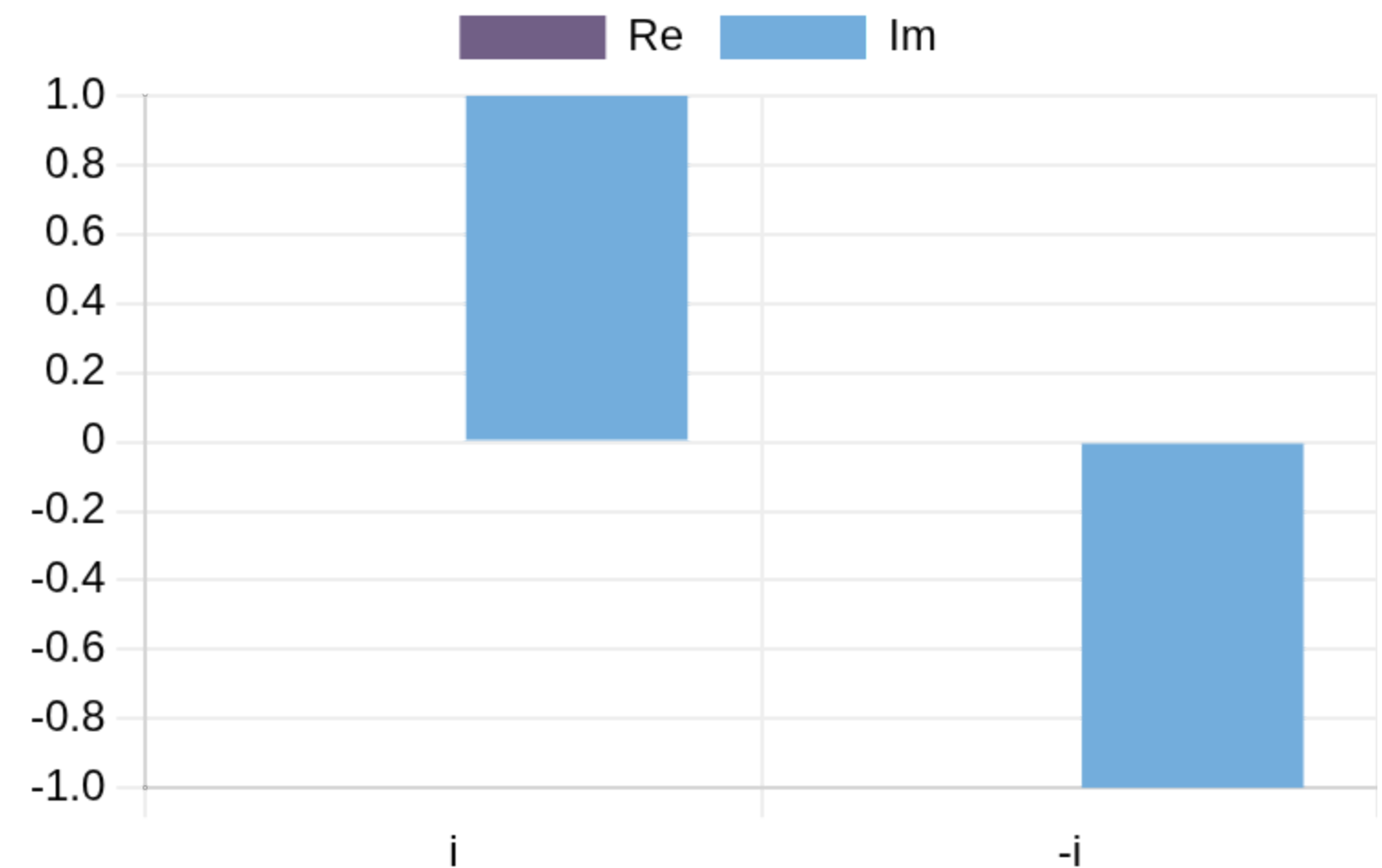
3. Упрощение через сопряжённое

Если делитель записан как $a + bi$, часто домножают числитель и знаменатель на сопряжённое число. Так получают вещественный знаменатель и упрощают вычисления.

Корни уравнения $z^2 = -1$ на комплексной плоскости

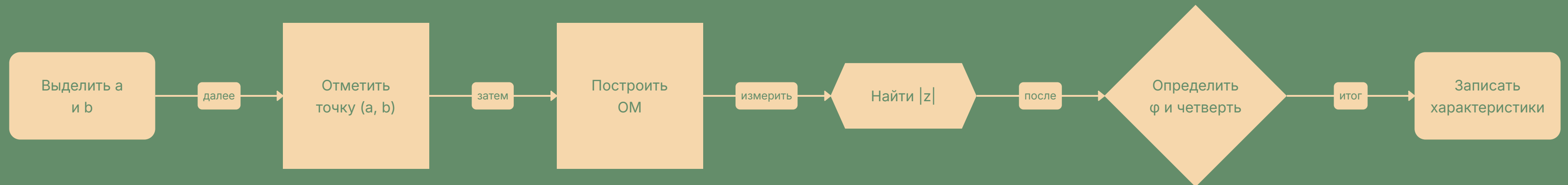
Обе точки лежат на единичной окружности и расположены строго симметрично относительно действительной оси, что видно на диаграмме.

Уравнение без вещественных решений имеет две комплексные корня; их расположение отражает симметрию и периодичность аргумента.



Как построить геометрический образ комплексного числа

Последовательность действий при переходе от алгебраической записи к точке, вектору и полярной форме



Применения геометрической интерпретации комплексных чисел



Колебания и сигналы

Комплексная запись удобна в физике колебаний и теории сигналов: она позволяет описывать амплитуду и фазу в одной формуле, не перегружая вычисления лишними преобразованиями.



Электротехника

В цепях переменного тока комплексные числа помогают компактно работать с фазовыми сдвигами и реактивными величинами, а геометрический смысл делает расчёты более наглядными.



Компьютерная графика

При поворотах и преобразованиях фигур комплексная форма упрощает описание движения точек на плоскости. Это особенно полезно там, где важны вращение и масштабирование.



Степени и корни

Формула Муавра и показательная форма облегчают возведение в степень и нахождение корней. Благодаря этому сложные тригонометрические выражения можно обрабатывать значительно системнее.

