

УГОЛ МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ

Как сравнить направления векторов
и решить геометрические задачи



ВЕКТОРЫ В ШКОЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ



Векторы помогают описывать направление и длину, работать с координатами и находить углы. В 9 классе они связывают рисунок, вычисления и доказательства без лишних измерений.

ЧТО ТАКОЕ ВЕКТОР И ЕГО ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

» ДЛИНА И НАПРАВЛЕНИЕ

Вектор — это направленный отрезок, который одновременно показывает, куда смотреть и насколько далеко двигаться. Его удобно изображать стрелкой на чертеже или координатной плоскости.

» РАВНЫЕ ВЕКТОРЫ

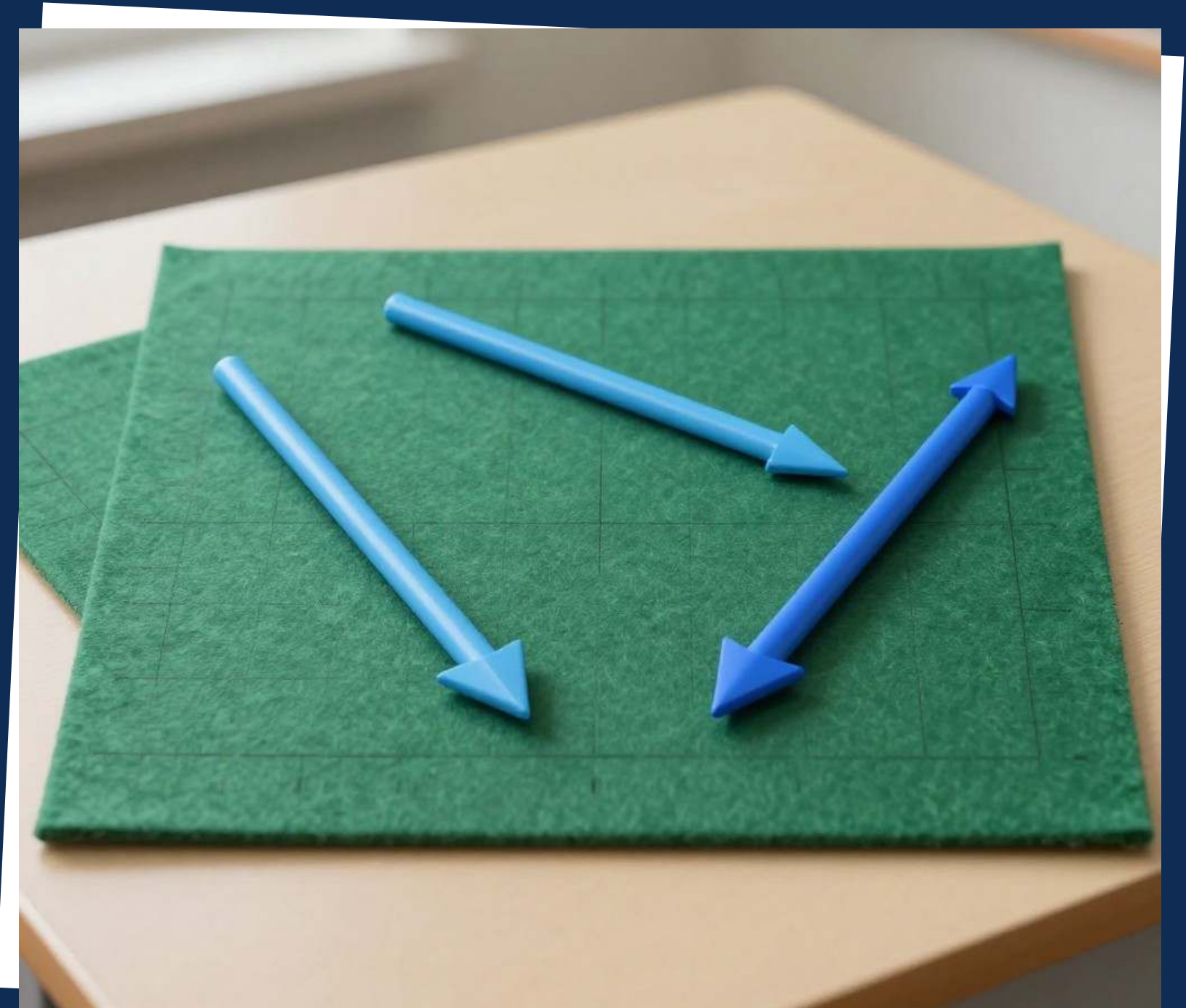
Равные векторы могут быть расположены в разных местах, но имеют одинаковую длину и одинаковое направление. Для сравнения важны не положение, а именно эти два признака.

» НУЛЕВОЙ ВЕКТОР

Нулевой вектор не имеет направления, потому что его начало и конец совпадают. Поэтому он не участвует в сравнении направлений и не образует угол с другими векторами.

» ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ ВЕКТОРЫ

Противоположные векторы равны по длине, но направлены в разные стороны. Такой случай удобно использовать, когда нужно понять, совпадают ли направления или расходятся ли они полностью.



КАК ЗАДАЕТСЯ УГОЛ МЕЖДУ ДВУМЯ ВЕКТОРАМИ

ОБЩАЯ ТОЧКА

Чтобы измерить угол между векторами, их начала совмещают. Тогда оба направления выходят из одной точки, и сравнивать их становится просто и наглядно.

МЕНЬШИЙ УГОЛ

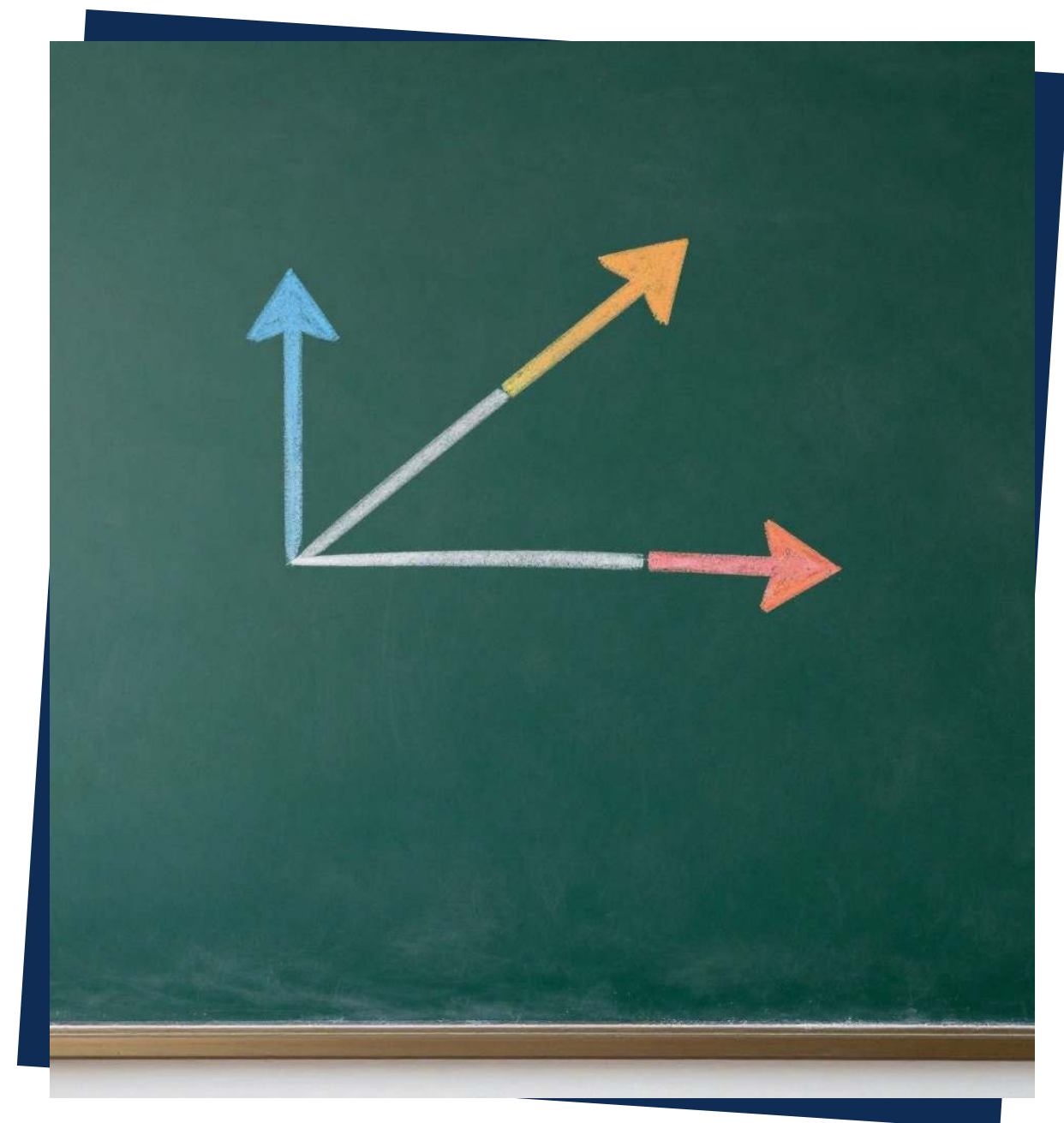
За угол между векторами принимают меньший из двух возможных углов. Поэтому его значение всегда находится в пределах от 0° до 180° .

ЧТО ВИДНО НА РИСУНКЕ

На чертеже обычно изображают две стрелки с общей начальной точкой и дугу между ними. Именно эта дуга показывает, какой угол нужно рассматривать.

КРАЙНИЕ СЛУЧАИ

Если векторы направлены одинаково, угол равен 0° . Если они смотрят в противоположные стороны, получается 180° . Эти случаи легко распознать без вычислений.



ТРИ ВАЖНЫЕ СИТУАЦИИ



90° — перпендикулярность

Векторы образуют прямой угол и пересекаются под углом 90°. Такой случай часто связан с осями координат, прямоугольниками и проверкой перпендикулярности сторон.



0° — одинаковое направление

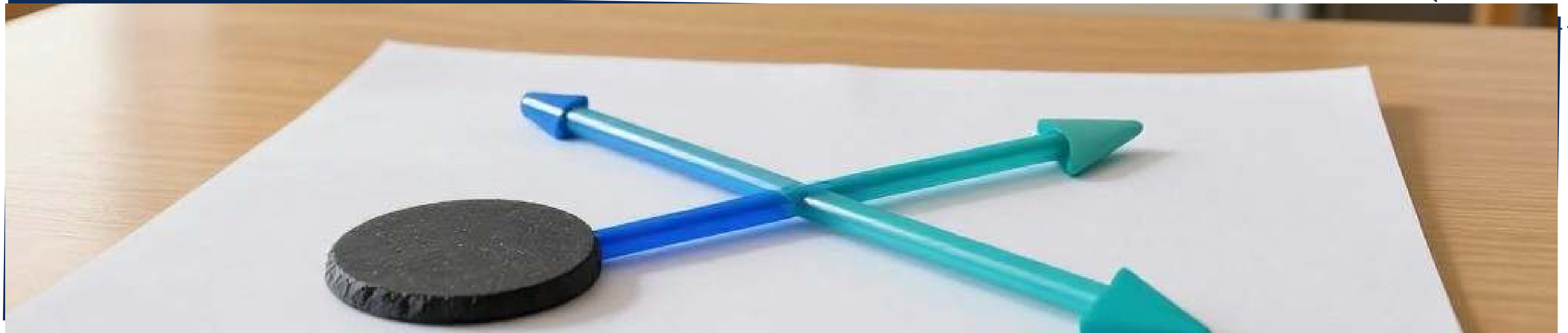
Векторы смотрят в одну сторону, поэтому их направления совпадают. Это самый простой случай: угол между ними равен нулю, а линии можно считать параллельными.



180° — противоположные направления

Векторы имеют одинаковую длину, но направлены в разные стороны. Они лежат на одной прямой, а угол между ними равен 180°.

ФОРМУЛА УГЛА ЧЕРЕЗ СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ



ОСНОВНАЯ ЗАПИСЬ

Угол между векторами находят по формуле $\cos \theta = (a \cdot b) / (|a| \cdot |b|)$. Она связывает угол, длины векторов и их скалярное произведение.

01

ЧТО ОЗНАЧАЕТ ЧИСЛИТЕЛЬ

Скалярное произведение показывает, насколько направления векторов согласованы. Если оно положительное, векторы направлены ближе друг к другу; если отрицательное, они расходятся сильнее.

02

ЗАЧЕМ НУЖНЫ ДЛИНЫ

Длины векторов стоят в знаменателе и помогают учесть размер каждого из них. Без этого сравнение направлений было бы неточным, особенно при разных длинах.

03

КАК ЧИТАТЬ РЕЗУЛЬТАТ

После вычисления косинуса определяют угол: нулевое значение даёт прямой угол, положительное — острый, а отрицательное — тупой. Это делает формулу удобной для школьных задач.

04

СВЯЗЬ УГЛА И КОСИНУСА

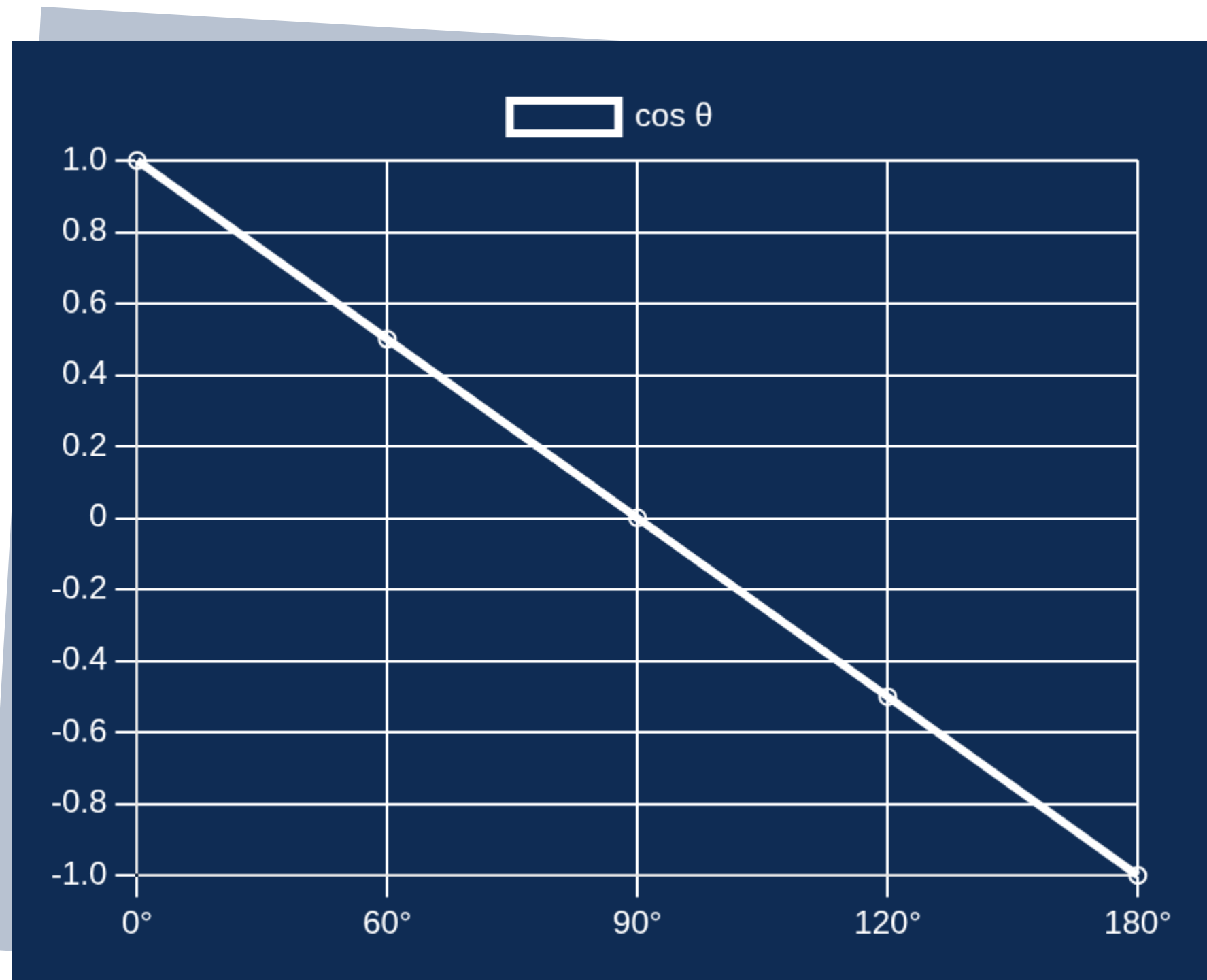
Таблица показывает три главных случая и помогает быстро определить тип угла по значению косинуса.

По значению косинуса можно сразу понять взаимное направление векторов без дополнительного чертежа.

Угол	cos	Смысл
0°	1	Одинаково
90°	0	Перпендикулярно
180°	-1	Противоположно

* Школьная формула связи угла и косинуса

КАК МЕНЯЕТСЯ $\cos \theta$ ПРИ УВЕЛИЧЕНИИ УГЛА



Кривая показывает, что косинус убывает постепенно и без скачков, а в точке 90° проходит через ноль.

Чем больше угол, тем меньше $\cos \theta$; после 90° значение становится отрицательным.

* Табличные значения $\cos \theta$ для углов 0° , 60° , 90° , 120° и 180°

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ В КООРДИНАТАХ

01

ФОРМУЛА В КООРДИНАТАХ

Для векторов $a = (x_1, y_1)$ и $b = (x_2, y_2)$ скалярное произведение равно $x_1x_2 + y_1y_2$. Это удобная запись для работы на координатной плоскости.

02

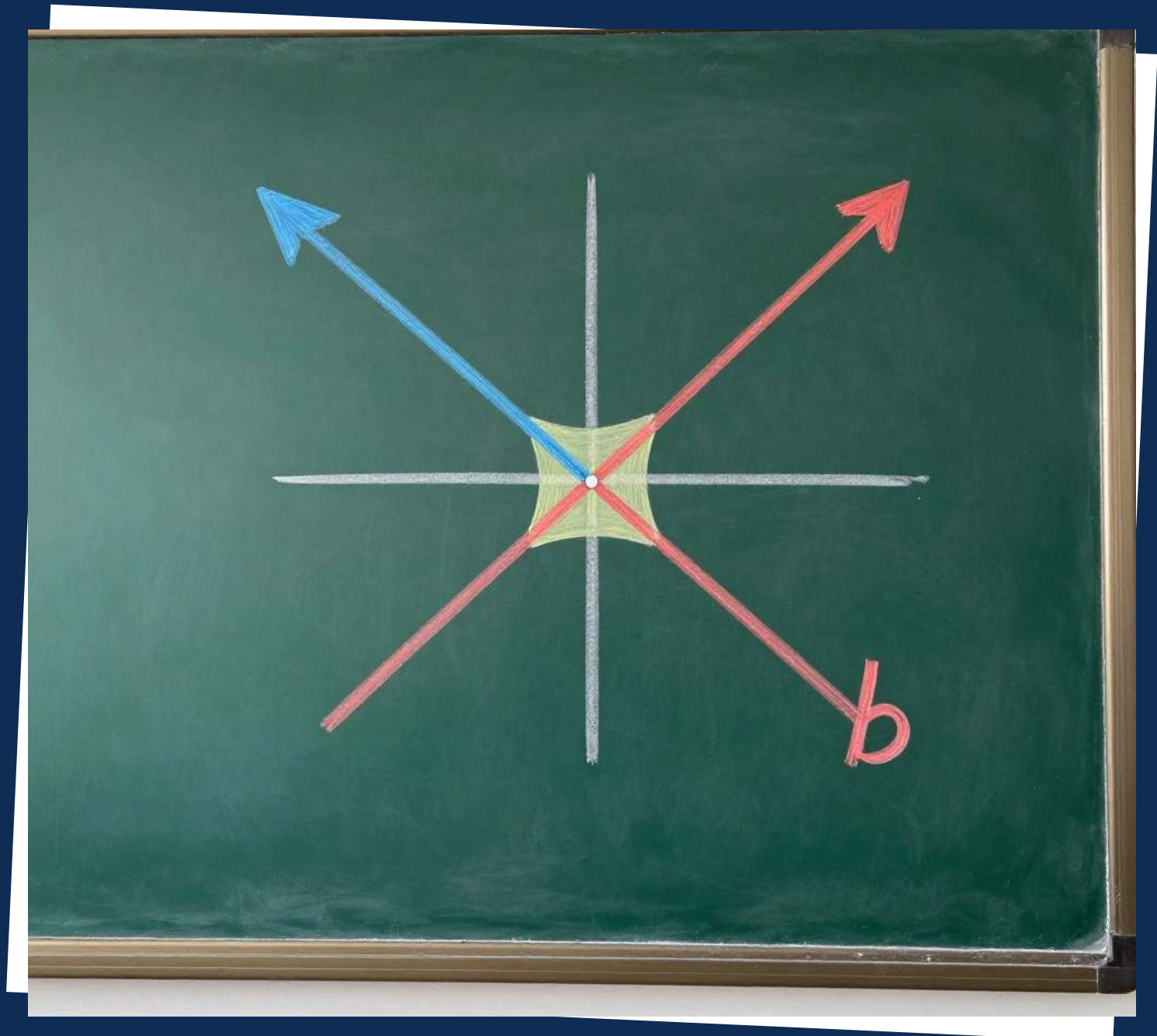
ПЕРЕХОД К УГЛУ

Если координаты векторов известны, можно вычислить их скалярное произведение и затем найти косинус угла. Так задача решается точно, без измерений по рисунку.

03

ПОЛЬЗА В ЗАДАЧАХ

Координатный способ особенно полезен, когда чертёж неудобен или нужен строгий ответ. Он помогает сравнивать направления, доказывать перпендикулярность и находить углы в геометрических фигурах.



КАК НАЙТИ УГОЛ МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ

Последовательность вычислений по координатам и скалярному произведению

ПРИМЕР ВЫЧИСЛЕНИЯ НА КООРДИНАТНОЙ ПЛОСКОСТИ

» СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

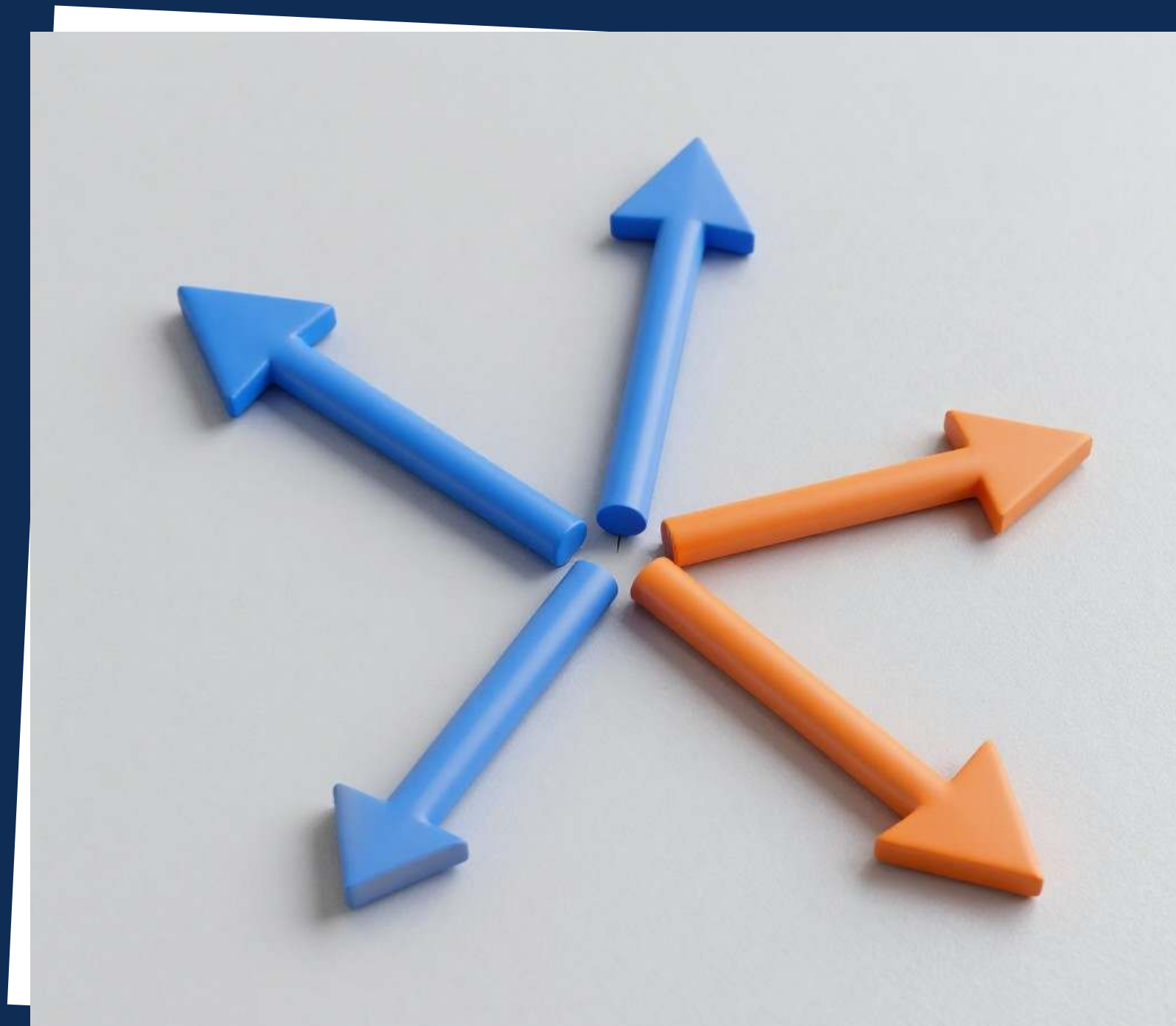
Для векторов $a = (3, 4)$ и $b = (4, -3)$ считаем $3 \cdot 4 + 4 \cdot (-3)$ и получаем 0. Это сразу подсказывает, что векторы перпендикулярны.

» ДЛИНЫ ВЕКТОРОВ

Каждый вектор имеет длину 5, потому что $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ и $\sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$. Значит, оба направления сравниваются в одинаковом масштабе.

» ОТВЕТ ПО ФОРМУЛЕ

Подставляем данные в формулу $\cos \theta = (a \cdot b) / (|a| \cdot |b|)$. Так как числитель равен нулю, получаем $\cos \theta = 0$, а значит, угол равен 90° .



ГДЕ ИСПОЛЬЗУЕТСЯ УГОЛ МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ



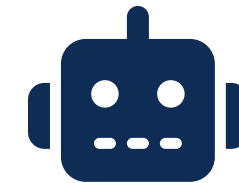
ГЕОМЕТРИЯ

Угол между векторами помогает точно определить перпендикулярность, параллельность и взаимное расположение сторон фигур без долгих построений и измерений на чертеже.



НАВИГАЦИЯ

В навигации и картографии угол между направлениями используется для поворота, изменения курса и выбора правильного маршрута по карте или схеме.



РОБОТОТЕХНИКА

В робототехнике угол помогает сравнивать траектории и корректировать движение. Робот может выбирать нужное направление, если знает угол между текущим и заданным курсом.



ФИЗИКА

В физике он показывает, как направлены сила и движение тела. Это важно, когда нужно понять, помогает ли сила движению или действует под углом.



КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРАФИКА

В графике векторные углы влияют на отражение света, построение теней и ориентацию поверхности. Благодаря этому изображение выглядит более реалистично.

СПОСОБЫ НАЙТИ УГОЛ МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ

Способ	Что нужно	Главный плюс
По рисунку	Чертёж и транспортир	Наглядность
По координатам	Координаты векторов	Точность
Через скалярное произведение	Координаты и длины	Универсальность

Сравнение показывает, какой способ удобнее в разных задачах и что нужно для вычисления.

По рисунку удобно проверять простые случаи, но точнее всего работают координаты и скалярное произведение. Для школьных задач самый надёжный вариант — формула через длины и произведение.

* Школьный курс геометрии, 9 класс

ЗНАК СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ТИП УГЛА



Знак скалярного произведения помогает быстро оценить взаимное направление векторов ещё до полного вычисления угла.

Положительное значение указывает на острый угол, ноль — на прямой, отрицательное — на тупой. Знак сразу задаёт нужный тип ответа.

* Школьная формула связи угла и скалярного произведения

ТИПИЧНЫЕ ОШИБКИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

ПУТАЮТ КООРДИНАТЫ

Иногда вместо координат вектора подставляют координаты точки или меняют местами числа. Из-за этого скалярное произведение получается неверным уже на первом шаге.

01

ЗАБЫВАЮТ ДЕЛЕНИЕ

После вычисления скалярного произведения нужно разделить его на произведение длин векторов. Если пропустить этот шаг, значение косинуса будет неверным.

02

НЕ ПРОВЕРЯЮТ ДИАПАЗОН

Угол между векторами всегда лежит от 0° до 180° . Если в ответе получается другое значение, значит, где-то допущена ошибка в вычислениях или выборе формулы.

03

НЕВЕРНО ЧИТАЮТ ЗНАК

Отрицательный косинус — это не погрешность, а признак тупого угла. По знаку удобно быстро понять, к какому виду относится ответ.

04

ПРОВЕРКА ОТВЕТА ПОСЛЕ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Последовательность промежуточной проверки помогает заметить ошибку до записи окончательного ответа.

УГОЛ МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

01

УГОЛ ПРИ ВЕРШИНЕ

Если два вектора выходят из одной вершины треугольника, то угол между ними совпадает с углом при этой вершине. Так векторный способ соединяется с обычной геометрией.

02

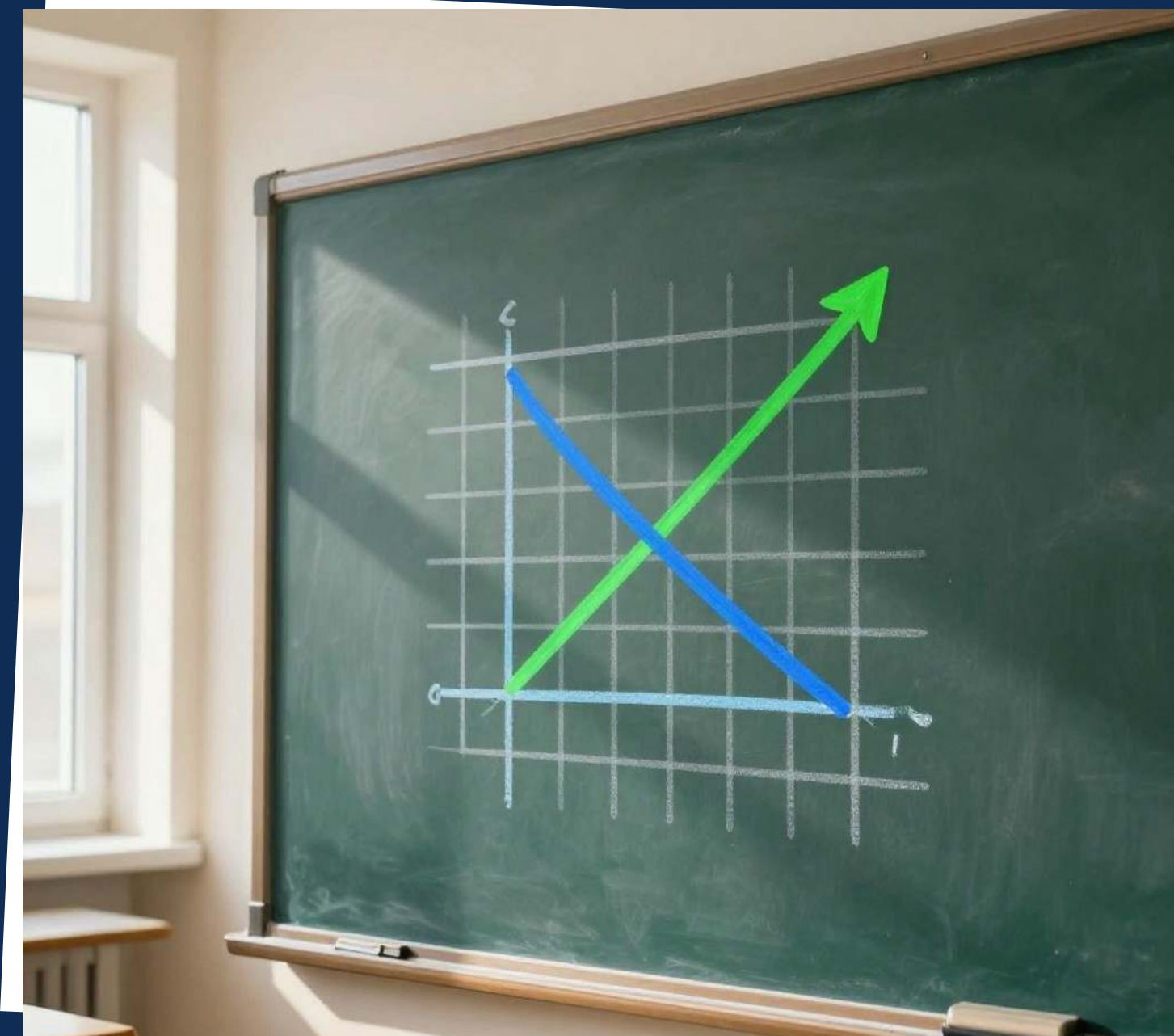
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Такой подход помогает находить углы, проверять параллельность и перпендикулярность сторон, а также аккуратно работать с треугольниками, заданными на координатной плоскости.

03

ПОЛЬЗА КООРДИНАТ

Когда координаты вершин уже известны, векторный метод часто короче чертежа и измерений. Он даёт точный результат и удобен для проверки ответа.



МИНИ-СЛОВАРЬ ОСНОВНЫХ ТЕРМИНОВ

Короткие определения помогут быстро вспомнить основные понятия темы и не путать их между собой.

Эти термины образуют основу всей темы: сначала задают векторы, затем сравнивают их направления и по формуле находят угол.

Термин	Что означает
Вектор	Направленный отрезок
Модуль	Длина вектора
Скалярное произведение	Число по двум векторам
Угол между векторами	От 0° до 180°
Перпендикулярные векторы	Угол 90°
Противоположные векторы	Одинакова длина, разное направление

* Школьные определения по геометрии

ПОЧЕМУ ЭТА ТЕМА ВАЖНА ДЛЯ ДАЛЬНЕЙШЕГО ИЗУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКИ

СВЯЗЬ РАЗДЕЛОВ

Угол между векторами объединяет геометрию, алгебру и координатный метод. Поэтому одна и та же идея помогает решать задачи разными способами.

ПОДГОТОВКА К НОВЫМ ТЕМАМ

Понимание скалярного произведения пригодится позже при изучении проекций, уравнений прямых, расстояний и элементов стереометрии в старших классах.

ТОЧНОСТЬ РЕШЕНИЯ

Векторный способ часто даёт более короткий и надёжный ответ, чем работа только по рисунку. Это особенно полезно в задачах с координатами.

ПРАКТИЧЕСКАЯ ПОЛЬЗА

Такие вычисления встречаются не только в геометрии, но и в прикладных задачах, где важно сравнивать направления и определять поворот объектов.

УГОЛ МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ — ЭТО ЯЗЫК НАПРАВЛЕНИЯ

Эта тема учит сравнивать направления точно и удобно. Формула через скалярное произведение, знак косинуса и предел от 0° до 180° помогают быстро находить верный ответ.